

Skript - Statik des starren Körpers

Autor: Norbert Marxer

Erstellung: 26.04.2025 (Version 1)

Inhaltsangabe

Inhaltsangabe	1
Einleitung	4
Arten von Kräften	5
Darstellung von Kräften als Vektoren	6
Zusammensetzen von Kräften (Ersatzkraft)	8
Einleitung	8
Kräfte mit gleicher Wirkungslinie	skalare Addition 8
Kräfte mit gleichem Angriffspunkt	vektorielle Addition 9
Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten	Schneiden der Wirkungslinien 10
Parallele Kräfte	Hilfskraft einführen 10
Kräftepaar	12
Zusammenfassung	13
Zerlegen von Kräften	14
Drehmoment	15
Einleitung	15
Kräftezerlegung	16
Verallgemeinerung	16
Definition des Drehmoments	16
Drehmoment bei einer Drehachse	17
Drehmoment bei einem Stützpunkt	19
Drehmoment bei einem freien Körper	19
Gleichgewicht	21
Gleichgewichtsbedingungen	21
Schwerpunkt	21
Gleichgewichtsarten	22
Standfestigkeit	23
Beispiele für Gleichgewicht im 2D	24
Körper mit einem Stützpunkt im 3D	29
Anhang	31
Anhang A Experimente	32
Anhang B Quellen	35
Anhang C Winkelfunktionen (Cosinus, Sinus, Tangens)	37
Einleitung	37
Einheiten für Winkel	37
Definition der Winkelfunktionen	37

	Arten von Winkelfunktionen	38
	Anwendungen der Winkelfunktionen in der Physik	40
	Eigenschaften von Winkelfunktionen	41
Anhang D	Rechnen mit Vektoren	42
	Einleitung	42
	Formeln (aus den Merkhilfen)	43
	Rechnen mit Vektoren	44
	Siehe auch	50
Anhang E	Drehscheibe mit Gewichten (optional)	51
	Herleitung der Formel für zwei Gewichte (ohne Summationszeichen)	54
	Einige Beispiele	55

Dieses Skript beschäftigt sich vornehmlich mit der Statik starrer Körper. Im Abschnitt **Einleitung** werden die Begriffe Statik und starrer Körper näher erläutert.

Im Abschnitt **Arten von Kräften** wird näher auf die beiden Arten von Kräften, nämlich Volumenkraft und Kontaktkraft, eingegangen. In den späteren Beispielen werden wir beide Arten kennenlernen.

Die Kräfte bzw. Kraftvektoren, die durch einen Betrag, eine Richtung sowie einen Angriffspunkt charakterisiert sind, spielen eine wichtige Rolle in der Statik. Im Abschnitt **Darstellung von Kräften als Vektoren** wird kurz darauf eingegangen. Viel ausführlicher werden Vektoren im Anhang D behandelt.

Mehrere auf einen starren Körper wirkenden Kräfte können zu einer einzigen Ersatzkraft zusammengesetzt werden, die die gleiche Wirkung auf den starren Körper hat, wie die Summe der Teilkräfte. Im Abschnitt **Zusammensetzen von Kräften** wird erläutert, dass je nach Richtungen, Wirkungslinien und Angriffspunkten ein unterschiedliches Vorgehen notwendig ist, um diese Ersatzkraft zu bestimmen. Eine wichtige Eigenschaft von starren Körpern ist, dass die angreifenden Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden können, ohne dass sich die Wirkung auf den starren Körper ändern würde.

Wir können nicht nur mehrere Kräfte zu eine Ersatzkraft zusammenfassen. Wir können auch das Umgekehrte durchführen, nämlich eine Kraft in mehrere Teilkräfte zerlegen. Im Abschnitt **Zerlegen von Kräften** wird dies besprochen. Diese Methode ist vor allem deshalb wichtig, weil so die verschiedenen Wirkungen von Kräften getrennt werden können. Beispielsweise kann die Gewichtskraft in Hangabtriebskraft und Normalkraft (verursacht die Reibung) aufgeteilt werden.

Der Abschnitt **Drehmoment** ist ein zentraler Abschnitt dieses Skripts. Wir diskutieren den Begriff "Drehmoment" und die verschiedenen Möglichkeiten, das Drehmoment zu bestimmen: von "Kraft mal Hebelarm" und die Rechte-Hand-Regel über $M = x F_y - y F_x$ in der 2-dimensionalen Ebene bis zum sehr nützlichen Vektorprodukt im 3-dimensionalen Raum. An unterschiedlichen Beispielen wie Körper mit Drehachse, Körper auf einem Stützpunkt sowie einem freien Körper wird der Begriff Drehmoment vertieft.

Ein weiterer zentraler Abschnitt behandelt das **Gleichgewicht**. Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn die Summe aller Kräfte (Kräftegleichgewicht) und die Summe aller Drehmomente (Drehmomentgleichgewicht) gleich Null sind. Dabei gibt es drei Gleichgewichtslagen: stabil, labil und indifferent. Ein wichtiger Begriff ist auch der Schwerpunkt: Wenn ein Körper im Schwerpunkt unterstützt wird, dann ist er bezüglich der Gewichtskraft im Gleichgewicht. Weiters diskutieren wir die Standfestigkeit, d.h. wie stabil ein Körper steht. Wir illustrieren sowohl die rechnerische als auch die experimentelle Bestimmung des Schwerpunkts von Balken und Platten an vielen Beispielen.

Mehrere **Anhänge** ergänzen das Skript: Einige Fotos zu **Experimenten**, die verwendeten **Quellen** mit den Querverweisen zur Physik und Mathematik Merkhilfe sowie zum Buch "Taschenbuch der Physik" von Horst Kuchling. Zum richtigen Verständnis der Statik sind auch einige mathematische Kenntnisse hilfreich. Im Anhang wird deshalb auf die **Winkelfunktionen** und die **Vektorrechnung** näher eingegangen. Ausserdem wird im Anhang ausführlich eine spezielle experimentelle Situation besprochen: eine **Drehscheibe mit Gewichten**.

Einleitung

Dieses Kapitel behandelt die Statik ([Link](#), [Link](#)) des starren Körpers.

Was heisst Statik überhaupt?

Die **Statik** ist ein Teilgebiet der Mechanik und behandelt ruhende und gleichmässig bewegte Körper und Fluide (Flüssigkeiten und Gase), bei denen sich die Kräfte und Drehmomente im Gleichgewicht befinden.

Wir behandeln in diesem Kapitel jedoch nicht die anderen Statiken ([Link](#)) wie ...

- Elektrostatik, Magnetostatik, Baustatik
- Hydrostatik, Aerostatik

Diese werden teilweise später behandelt.

Dieses Kapitel behandelt die Statik des starren Körpers ([Link](#)). Was ist ein starrer Körper überhaupt?

- Ein **starrer Körper** ist ein idealisiertes Modell eines festen Körpers, der nicht verformbar ist: d.h. dass beliebige Punkte des Körpers trotz äusseren Kräften immer den gleichen Abstand zueinander haben.
- Es gibt somit keinerlei Durchbiegung oder elastische Verformung. Es treten Verschiebungen des gesamten Körpers in eine Richtung (**Translation**) und Drehungen (**Rotation**) auf.
- Der Körper kann dabei eine kontinuierliche Massenverteilung aufweisen oder ein System von diskreten Massenpunkten sein.
- Das Konzept des starren Körpers ist inkonsistent mit den Vorhersagen der Relativitätstheorie, da nach dem Konzept des starren Körpers stets der gesamte Körper auf Kräfte und Drehmomente gleichzeitig reagiert, was impliziert, dass ihre Wirkungen sich innerhalb des Körpers mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten, insbesondere also schneller als mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c (der gemäss Relativitätstheorie höchstmöglichen Geschwindigkeit). Bei realen Körpern breiten sie sich hingegen üblicherweise mit der für den Körper spezifischen Schallgeschwindigkeit aus, die weit unterhalb von c liegt.

Arten von Kräften

Kräfte spielen in der Mechanik eine wichtige Rolle ...

- Kräfte- und Drehmomentgleichgewicht in der Statik,
- Bewegungsänderungen und Verformungen auf Grund von Kräften in der Dynamik,
- Anregen und Abschwächen von Schwingungen.

Die Kraft ist eine vektorielle physikalische Grösse, denn sie hat auch eine Richtung.

Man unterscheidet zwischen ...

- **Volumenkraft** = Feldkraft (engl. **body force**)
- **Kontaktkraft** = Oberflächenkraft (engl. **contact force**)

Eine **Feldkraft** bzw. **Volumenkraft** ist eine Kraft, die im gesamten Inneren eines abgegrenzten Volumens eines Körpers angreift. Diese unsichtbaren Volumenkräfte werden durch Felder wie Gravitationsfeld, elektrisches Feld oder Magnetfeld verursacht.

Eine **Kontaktkraft** ist eine Kraft, bei der zwei Objekte Kontakt miteinander machen. Kontaktkräfte kommen häufig vor und sind verantwortlich für die meisten sichtbaren Wechselwirkungen von makroskopischen Körpern. Beispiele ...

- Kollision zweier Autos (kurzer Kraftstoss),
- Glas auf einem Tisch stehend (kontinuierliche Kraft),
- Reibungswiderstand beim Gleiten.

Kontaktkräfte werden zur genaueren Analyse in zwei senkrecht aufeinander stehende Komponenten zerlegt ...

- die **Normalkraft** (senkrecht auf der Oberfläche),
- die **Parallelkraft** bzw. **Reibungskraft** (parallel zur Oberfläche).

Eigentlich machen bei der **Normalkraft** die beiden Körper keinen "Kontakt". Die Abstossung erfolgt auf Grund des Pauli-Ausschluss-Prinzips ...

- Elektronen/Fermionen können nicht den gleichen Energiezustand besetzen und die Anregung auf einen höheren Energiezustand würde viel Energie brauchen.
- Dies ist ähnlich wie bei den Neutronensternen (sind auch Fermionen), bei der die Neutronen den Kollaps in ein schwarzes Loch verhindern.
- Interessant ist in diesem Zusammenhang der Artikel "The quantum reason behind the solidity of matter" (11.12.2024) von Ethan Siegel ([Link](#)).

Bei der **Parallelkraft** wirken elektromagnetische Kräfte (Adhäsionskräfte und Bildung chemischer Bindungen) sowie Kräfte auf Grund der Unebenheit der beiden in Kontakt stehenden Körper.

Darstellung von Kräften als Vektoren

Die Kraft ist durch drei Eigenschaften bestimmt: Betrag, Richtung und Angriffspunkt.

- Der **Betrag** der Kraft gibt die Grösse der wirkenden Kraft an.
- Die **Richtung** der Kraft kann durch einen Vektor oder auch durch seine Wirkungslinie und den Richtungssinn auf ihr beschrieben werden.
- Der **Angriffspunkt** gibt an, wo die Kraft wirkt.

Durch Betrag und Richtung ist ein Vektor bestimmt. Bei der Analyse von Kräften spielt die Vektorrechnung deshalb eine wichtige Rolle (siehe auch Anhang D "Rechnen mit Vektoren"). Im Gegensatz zu freien Vektoren (die im Raum beliebig parallel verschoben werden können) ist die Kraft an ihre Wirkungslinie gebunden und besitzt einen Angriffspunkt.

Wie üblich schreiben wir für die Kraft $\vec{F}$ mit einem Pfeil darüber, während wir für den Betrag der Kraft F ohne Pfeil verwenden. Beispielsweise ...

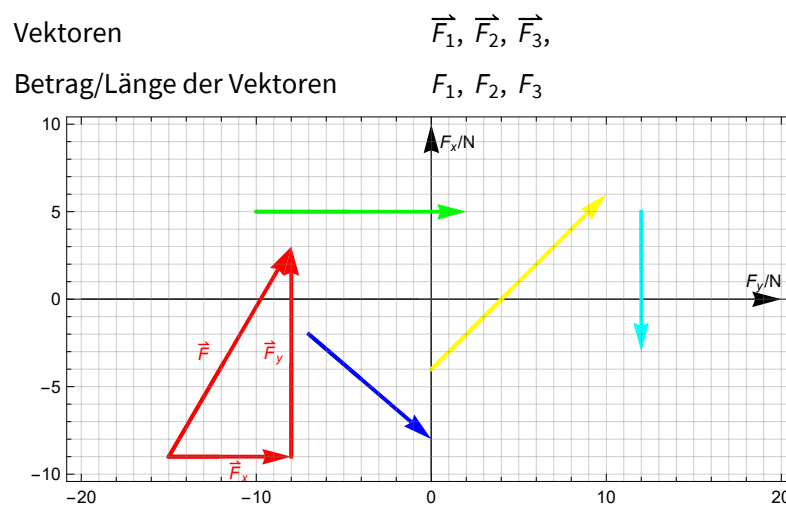


Abbildung Verschiedene Vektoren im 2D

Der Kraftvektor $\vec{F}$ kann in seine Komponenten zerlegt werden und als Spaltenvektor geschrieben werden (hier im 2D) ...

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

- $\vec{F}_x$ und $\vec{F}_y$ sind die sogenannten Komponenten des Vektors $\vec{F}$
- $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ sind die Basiseinheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems
- F_x und F_y sind die Koordinaten des Vektors

Die Längen/Beträge dieser Vektoren können folgendermassen aus der Zeichnung bestimmt werden ...

- Bestimmung des **Vektors** (Spitze minus Schaft) ...
 - $\vec{F}_{\text{rot}}/\text{N} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ 7 nach rechts (x), 12 nach oben (y)
 - $\vec{F}_{\text{grün}}/\text{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - $\vec{F}_{\text{blau}}/\text{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ usw.

- Betrag/**Länge** des Vektors (mit Hilfe des Satz von Pythagoras)...
- $F_{\text{rot}}/N = \sqrt{7^2 + 12^2} = \sqrt{49 + 144} = \sqrt{193} = 13.89$
- $F_{\text{grün}}/N = \sqrt{12^2 + 0^2} = \sqrt{144} = 12$
- $F_{\text{blau}}/N = \sqrt{(7)^2 + (-6)^2} = \sqrt{85} \approx 9.22$

Bei Vektoren, die parallel zur x - oder y -Achse liegen, entspricht die Länge dem Betrag der Differenz der x - bzw. y -Werte, da die andere Komponente gleich 0 ist.

Zusammensetzen von Kräften (Ersatzkraft)

Einleitung

Kräfte sind vektorielle physikalische Größen. Sie können somit als Vektoren dargestellt werden. Wenn mehrere Kräfte gleichzeitig (mit eventuell anderen Angriffspunkten) auf einen Körper einwirken, können die Kräfte (Ausnahme: Kräftepaare) zusammengesetzt werden und durch eine einzelne resultierende Kraft (**Ersatzkraft**), die an einem zu bestimmenden Angriffspunkt angreift, ersetzt werden. Diese Ersatzkraft hat die gleiche Wirkung auf den Körper wie die Einzelkräfte zusammen.

Wichtig ist die folgende Tatsache: eine Kraft kann beim starren Körper entlang der **Wirkungslinie** verschoben werden (und hat damit für einen gegebenen Drehpunkt immer das gleiche Drehmoment), ohne dass sich die Wirkung auf den Körper ändert. Die Wirkungslinie ist die Linie/Gerade, die durch den Angriffspunkt geht und die gleiche Richtung wie der Kraftvektor hat.

Wir unterscheiden im Folgenden die folgenden verschiedenen Situationen ...

- | | |
|--|---|
| ■ Kräfte mit gleicher Wirkungslinie | skalare Addition |
| ■ Kräfte mit gleichem Angriffspunkt | vektorielle Addition |
| ■ Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten | Schneiden der Wirkungslinien, dann vektorielle Addition |
| ■ Parallele Kräfte | Einführung zweier Hilfskräfte, dann Schneiden der Wirkungslinien, dann vektorielle Addition |
| ■ Kräftepaare | |

Kräfte mit gleicher Wirkungslinie

skalare Addition

Wenn mehrere Kräfte die gleiche Wirkungslinie haben, kann die **Ersatzkraft F_E** durch die **skalare Addition** der gerichteten Beträge der Kraftvektoren ermittelt werden. Das Vorzeichen gibt die Richtung der Ersatzkraft auf der gegebenen Wirkungslinie an. Der Ersatz-Angriffspunkt darf beliebig auf der Wirkungslinie verschoben werden.

Für unser Beispiel :

- $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ N}$ $F_1 = 10.2 \text{ N}$
- $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ N}$ $F_2 = 5.1 \text{ N}$
- $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ -1.8 \end{pmatrix} \text{ N}$ $F_3 = 9.2 \text{ N}$ aber andere Richtung

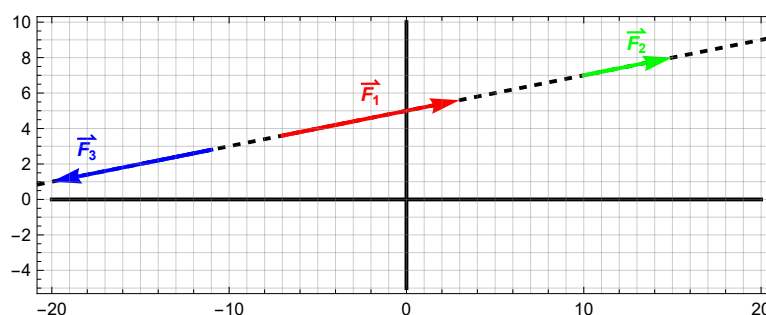


Abbildung: Drei verschiedene Kräfte auf der gleichen Wirkungslinie: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$.

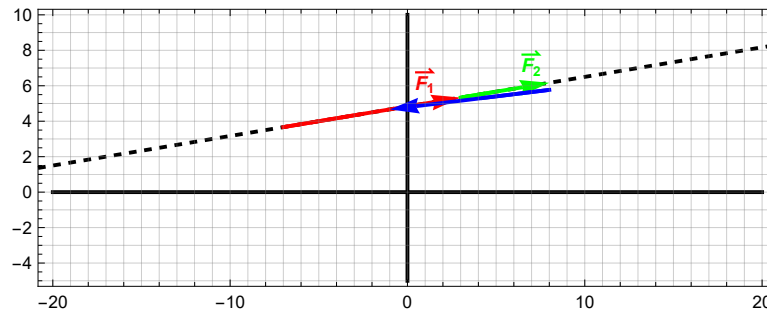


Abbildung Konstruktion des Betrags der resultierenden Ersatzkraft: $F_E = F_1 + F_2 - F_3$.

Die resultierende Kraft (rot + grün - blau) ...

$$\vec{F}_E = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} -9 \\ -1.8 \end{pmatrix} \text{ N} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1.2 \end{pmatrix} \text{ N}$$

$$F_E = 6.1 \text{ N} \quad = (10.2 + 5.1 - 9.2) \text{ N}$$

Kräfte mit gleichem Angriffspunkt

vektorielle Addition

Drei Kräfte haben den gleichen Angriffspunkt.

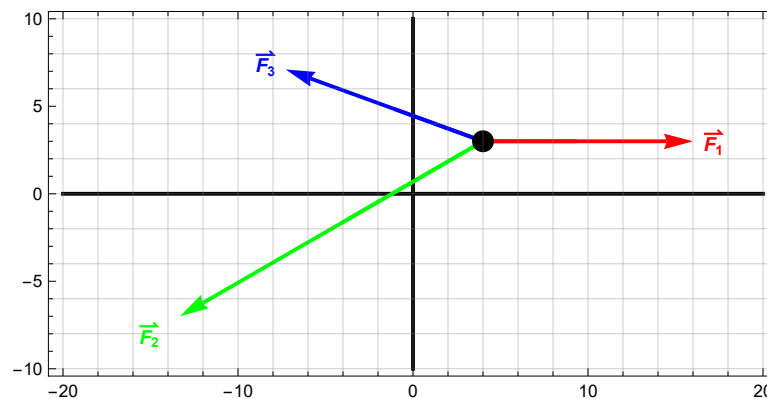


Abbildung Drei Kräfte mit dem gleichem Angriffspunkt.

Wenn mehrere Kräfte den gleichen Angriffspunkt haben, kann die Ersatzkraft (bzw. Resultierende) durch **vektorielle Addition** der Kraftvektoren ermittelt werden. Hier wird der Polygonzug $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ (also rot+grün+blau) dargestellt.

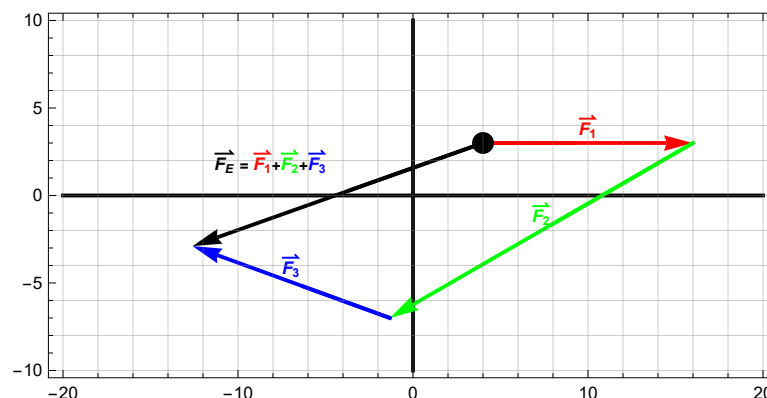


Abbildung Das Kräftepolygon zur Ermittlung der Ersatzkraft $\vec{F}_E$.

Rechnerisch ergibt sich die Ersatzkraft zu ...

$$\vec{F}_E = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \stackrel{2D}{=} \begin{pmatrix} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \end{pmatrix}$$

Einige Bemerkungen ...

- Die Kräfte haben alle den gleichen Angriffspunkt und dürfen eigentlich nicht verschoben werden. Zur rechnerischen Addition ist dies aber erlaubt.
- Der Angriffspunkt von $\vec{F}_E$ ist natürlich der gleiche wie bei den drei Kräften $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$.
- Ein Spezialfall dieser Konstruktion ist das Kräfteparallelogramm, bei dem 2 Kräfte addiert werden.

Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten

Schneiden der Wirkungslinien

Wenn zwei Kräfte verschiedene Angriffspunkt haben, dann wird zunächst der Schnittpunkt der beiden Wirkungslinien bestimmt.

Die beiden Kraftvektoren werden dann an diese Stelle verschoben und können wie oben mit der vektoriellen Addition bestimmt werden.

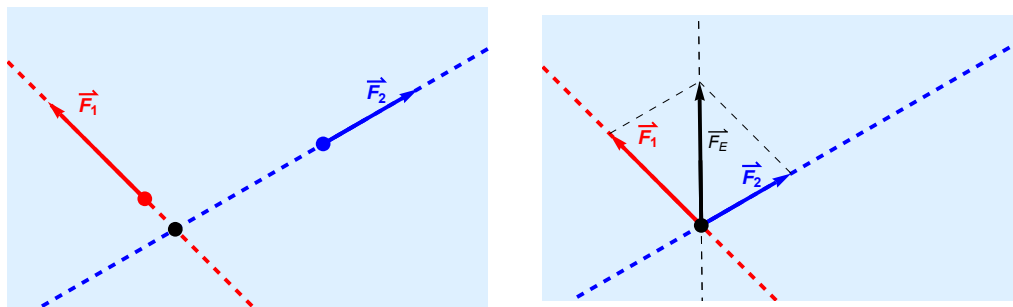
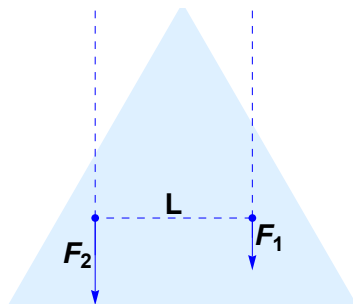


Abbildung Zwei Kräfte mit ungleichem Angriffspunkt und ungleicher Wirkungslinie.

Parallele Kräfte

Hilfskraft einführen

Bei der Zusammensetzung (Addition) von zwei parallelen Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ mit unterschiedlichen Angriffspunkten P_1 und P_2 schneiden sich die beiden Wirkungslinien nicht. Der Einfachheit halber setzen wir die Angriffspunkte auf gleicher Höhe an. Wir dürfen ja die Kräfte entlang der Wirkungslinie verschieben.



Zur Bestimmung der Ersatzkraft und des Ersatzangriffspunkt gibt es einen Trick.

Vorgehen (Trick)

Wir führen zusätzlich zu den beiden Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ die beiden Hilfskräfte $\vec{H}_1 = \vec{G}$ und $\vec{H}_2 = -\vec{G}$ bei den Angriffspunkten P_1 bzw. P_2 ein. Die beiden Hilfskräfte haben den gleichen Betrag ($H_1 = H_2$), jedoch einen entgegengesetzten Richtungssinn, ihre gemeinsame Wirkungslinie liegt auf der Geraden durch die Punkte P_1 und P_2 .

Da die beiden Hilfskräfte gleich gross sind und auf der gleichen Wirkungslinie liegen, addieren sie sich zum Nullvektor $\vec{0}$ und haben somit (physikalisch) keinen Einfluss auf die Kräftesituation.

Die beiden neuen Kräfte $\vec{F}_1'$ und $\vec{F}_2'$...

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1 + \vec{G} \quad \text{bzw.} \quad \vec{F}_2' = \vec{F}_2 - \vec{G}$$

können entlang der (neuen) Wirkungslinien verschoben werden und ergeben jetzt einen Schnittpunkt.

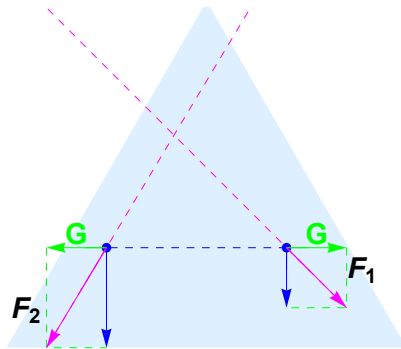


Abbildung Schneiden der neuen Wirkungslinien.

Wir können **zeichnerisch** die Ersatzkraft $\vec{F}_E$ bestimmen. Sie ...

- hat die Länge $F_R = F_1 + F_2$,
- deren Wirkungslinie geht durch den Schnittpunkt der beiden Wirkungslinien und
- ist parallel zu den Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$

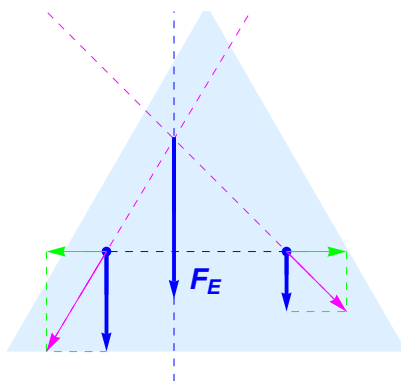
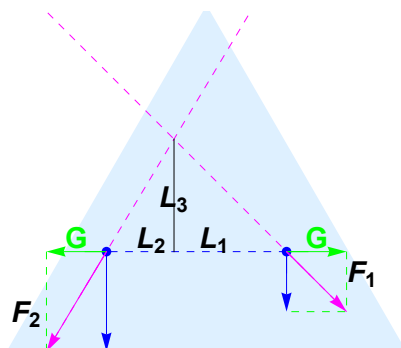


Abbildung Ersatzkraft mit Wirkungslinie.

Wir können den Abstand der Wirkungslinie der Ersatzkraft $\vec{F}_E$ von den beiden Wirkungslinien der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ auch **rechnerisch** bestimmen mit Hilfe der folgenden Abbildung.



Der Strahlensatz liefert ...

$$\frac{L_3}{L_1} = \frac{F_1}{G} \quad \text{und} \quad \frac{L_3}{L_2} = \frac{F_2}{G}$$

$$\text{bzw.} \quad L_3 G = F_1 L_1 \quad \text{und} \quad L_3 G = F_2 L_2$$

Gleichsetzen liefert die folgende Bedingung ...

$$(1) \quad F_1 L_1 = F_2 L_2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{F_2}{F_1} \quad \textbf{Hebelgesetz}$$

Ausserdem gilt ...

$$(2) \quad L_1 + L_2 = L \quad L \text{ ist gleich dem Abstand der beiden Angriffspunkte}$$

Aus diesen beiden Bedingungen lässt sich die Lage der neuen Wirkungslinie berechnen.

$$(1) \quad F_1 L_1 - F_2 L_2 = 0$$

$$(2) * F_2 \quad F_2 L_1 + F_2 L_2 = F_2 L$$

Addition dieser zwei Gleichungen ergibt ...

$$(F_1 + F_2) * L_1 = F_2 L \quad \rightarrow \quad L_1 = \frac{F_2}{F_1 + F_2} L$$

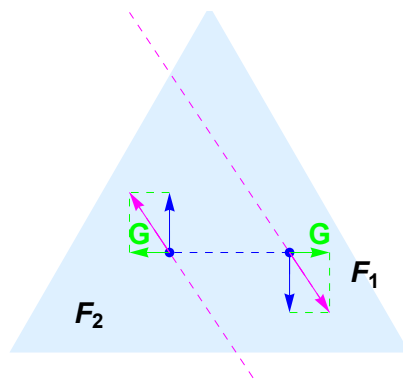
$$\text{analog} \quad L_2 = \frac{F_1}{F_1 + F_2} L \quad \text{oder} \quad L_2 = L - L_1$$

Kräftepaar

Ein Kräftepaar besteht aus zwei Kräften, die ...

- antiparallel sind (d.h. sie haben einen entgegengesetzten Richtungssinn),
- und den gleichen Betrag haben.

Für ein Kräftepaar funktioniert der obige Trick nicht. Die neuen Wirkungslinien sind auch parallel.



Es gilt:

- Ein Kräftepaar kann nicht durch eine Ersatzkraft ersetzt werden.
- Die Wirkung eines Kräftepaares hängt nur von der Grösse $M = F L$ ab.
- Die Wirkung des Kräftepaares hängt nicht davon ab, wo das Kräftepaar angreift.
- Diese Grösse wird als Moment bezeichnet.
- Der Drehsinn Uhrzeigersinn/Gegenuhrzeigersinn ist zu beachten.
- Durch die Einführung eines Kräftepaares lässt sich die Wirkungslinie einer Kraft parallel verschieben.

Zusammenfassung

Die Berechnung der Ersatzkraft und deren Wirkungslinie geschieht folgendermassen:

1) Kräfte mit gleicher Wirkungslinie:

Ersatzkraft: Berechnung mittels skalarer Addition.
Das gleiche Ergebnis würde resultieren bei vektorieller Addition.

Wirkungslinie: Gegeben.

2) Kräfte mit gleichem Angriffspunkt:

Ersatzkraft: Berechnung mittels vektorieller Addition.

Wirkungslinie: Gegeben durch den Angriffspunkt und die Richtung der berechneten Ersatzkraft.

3) Nichtparallele Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten:

Ersatzkraft: Berechnung mittels vektorieller Addition.

Wirkungslinie: Gegeben durch den Schnittpunkt der beiden Wirkungslinien und die Richtung der berechneten Ersatzkraft.

4) Parallele Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten:

Ersatzkraft: Berechnung mittels skalarer Addition (Die Kräfte zeigen in die gleiche Richtung).

Angriffspunkt: Bestimmung mittels Hebelgesetz.

Wirkungslinie: Gegeben durch den Angriffspunkt und die gegebene Richtung der parallelen Kräfte.

Wenn mehrere Kräfte (nicht nur zwei wie oben) an einem starren Körper angreifen, kann die Ersatzkraft und der Angriffspunkt durch wiederholtes Anwenden des obigen Vorgehens bestimmt werden.

5) Kräftepaar (d.h. zwei antiparallele Kräfte mit gleichem Betrag):

Ein Kräftepaar lässt sich nicht durch eine Einzelkraft ersetzen.

Zerlegen von Kräften

Eine Kraft kann in beliebig viele Komponenten zerlegt werden (Polygonzug). Damit können die verschiedenen Wirkungen der Komponenten getrennt oder verdeutlicht werden ...

- Bei der Analyse der Bewegung an der geneigten Ebene wird die Gewichtskraft in die Komponente Hangabtriebskraft und die Komponente Normalkraft (die zur Bestimmung der Reibungskraft benötigt wird) zerlegt. Siehe dazu im Kapitel Dynamik.
- Bei der Analyse des Drehmoments an einem starren Körper wird die Kraft in eine Komponente parallel zur Geraden durch die Drehachse und den Angriffspunkt und eine Komponente senkrecht dazu aufgeteilt. Die erste Komponente zieht an der Drehachse, die zweite Komponente hat eine Drehwirkung.

Wichtig ist vor allem das Verfahren, wenn ein Vektor $\vec{F}$ (rot in der Abbildung unten) in zwei vorgegebene Richtungen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ (blau) aufgeteilt werden soll.

Wir zeichnen (rot strichliert) die Gerade, die parallel zur Richtung $\vec{r}_1$ und durch die Spitze des Kraftvektors $\vec{F}$ verläuft, sowie die Gerade, die parallel zur Richtung $\vec{r}_2$ und durch die Spitze des Kraftvektors $\vec{F}$ verläuft. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den beiden Richtungsvektoren (blau) ergeben die gesuchte Aufteilung in die Kraftvektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ (grün). Diese beiden Komponenten $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ haben den gleichen Angriffspunkt wie die ursprüngliche Kraft $\vec{F}$.

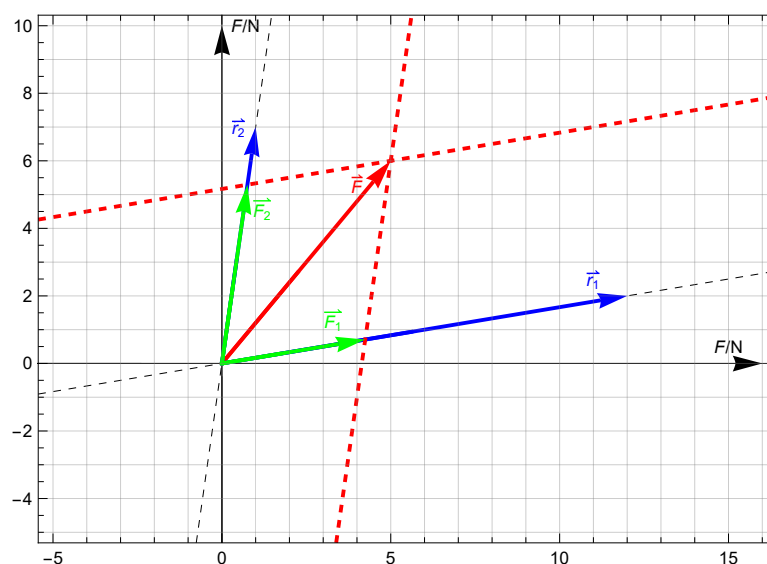


Abbildung Zerlegung des roten Kraftvektors in die beiden blauen Richtungen.

Diese Aufgabe kann auch rechnerisch gelöst werden mit Hilfe (z.B) ...

- des Sinussatzes,
- der Vektorgeometrie,
- der Projektion,
- eines linearen Gleichungssystems.

Drehmoment

Einleitung

Wir alle kennen von Spielplätzen das Spielgerät Wippe bzw. Gigampfi.



Abbildung Wippe (Link)

Wir kennen auch die Funktionsweise - das Prinzip des Hebelarms. Um Gleichgewicht zu erzielen, müssen auf der linken und rechten Seite 2 Kinder so platziert werden, dass das Produkt "Gewichts(kraft) mal Abstand von der Drehachse" für beide gleich ist.

Wir können dies schematisch folgendermassen illustrieren. Auf der linken Seite haben wir die Gewichtskraft mg und den Abstand d , auf der rechten Seite die Gewichtskraft $2m$ und den Abstand $d/2$. Beide Produkte sind gleich gross. Wir haben Gleichgewicht.

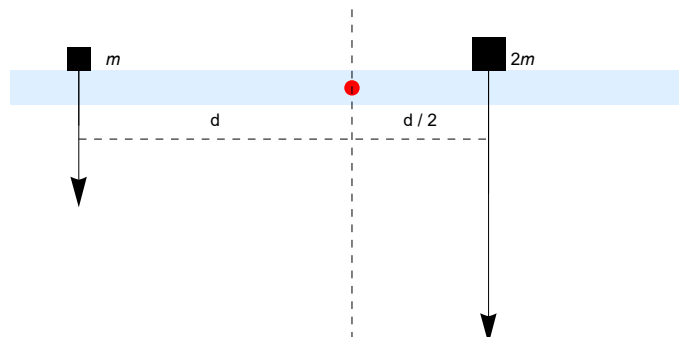
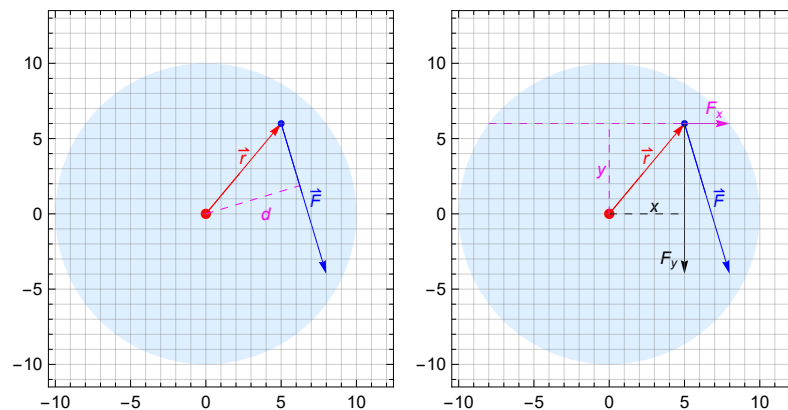


Abbildung Gleichgewicht an einem Balken.

Der Ausdruck mgd entspricht dem sogenannten Drehmoment. Wir werden das Drehmoment im Folgenden etwas genauer untersuchen.

Kräftezerlegung

Wir gehen von einem starren Körper mit Drehachse aus. Auf ihn wirken unterschiedliche Kräfte.



- Abbildung**
- Drehmoment gemäss Kraft mal Hebelarm: $M = F d$
 - Kräftezerlegung von $\vec{F}$ in F_x und F_y und 2 mal “Kraft mal Hebelarm” anwenden.
Drehmoment: $M = x F_y - y F_x$

Das Vorzeichen des Drehmoments bzw. die Drehrichtung ist so, dass ein Drehmoment im Gegenuhrzeigersinn positiv und eines im Uhrzeigersinn negativ ist. In obiger Zeichnung liefert

$x F_y$ wegen $x > 0$ und $F_y < 0$ ein (korrektes) negatives Vorzeichen für M

$-y F_x$ wegen $y > 0$ und $F_x > 0$ ein (korrektes) negatives Vorzeichen für M

Wenn $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist, so gilt also die Formel $M = x F_y - y F_x$. Diese Gleichung gilt, wenn $\vec{r}$ und $\vec{F}$ in der xy -Zeichenebene liegen und die z -Achse senkrecht dazu verläuft.

Verallgemeinerung

Wir haben gesehen, dass $M = x F_y - y F_x$ für eine Drehachse gilt. Wir können das verallgemeinern und erhalten für beliebige Kräfte im 3-dimensionalen Raum (für ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem) ...

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y F_z - z F_y \\ z F_x - x F_z \\ x F_y - y F_x \end{pmatrix}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung entspricht gerade dem Vektorprodukt $\vec{r} \times \vec{F}$ (siehe Anhang D).

Definition des Drehmoments

Wir definieren nun: Das **Drehmoment** $\vec{M}$ ist gegeben durch das Vektorprodukt ...

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} y F_z - z F_y \\ z F_x - x F_z \\ x F_y - y F_x \end{pmatrix}$$

Dabei ist ...

- $\vec{r}$ der Verbindungsvektor von einem (beliebig wählbaren) Bezugspunkt zum Angriffspunkt der Kraft und
- $\vec{F}$ ist die auf den Körper wirkende Kraft.

Wie man aus der Definitionsgleichung sieht, ist das Drehmoment eine vektorielle physikalische Grösse und die Einheit des Drehmoments ist gegeben durch ...

$$[\vec{M}] = [r] * [F] = m * N = \text{Newtonmeter} = N m$$

Die **Länge** bzw. der **Betrag** des Drehmomentvektors $\vec{M}$ berechnet sich gemäss $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ zu ...

$$M = r * F * \sin[\alpha]$$

wobei α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ ist. Der Betrag entspricht der Fläche des von den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ aufgespannten Parallelogramms. Wie wir später noch zeigen werden, entspricht diese Länge auch dem Wert “Kraft mal Hebelarm”.

Die **Richtung** des Drehmomentvektors $\vec{M}$ berechnet sich gemäss der Rechte-Hand-Regel. $\vec{M}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ und der Richtungssinn ist gegeben durch die Rechte-Hand-Regel. Wenn der Daumen in die Richtung von $\vec{r}$ und der Zeigefinger in die Richtung von $\vec{F}$ zeigt, dann zeigt der abgespreizte Finger in die Richtung des Vektors $\vec{M}$.

Wir haben nun zwei Methoden, um das Drehmoment auszurechnen.

- 1) “Kraft mal Hebelarm” und “Rechte-Hand-Regel”
- 2) Vektorprodukt ausrechnen

Drehmoment bei einer Drehachse

Wir illustrieren hier diese beiden Methoden für einen starren Körper mit Drehachse. Der Drehmomentvektor hat dann nur eine Komponente parallel zur Drehachse. Die anderen Komponenten würden versuchen, die Achse zu kippen. Dies wird jedoch durch die Befestigung verhindert. Es gilt also ...

$$M_z = x F_y - y F_x \quad M_x = M_y = 0$$

Die Formel zeigt auch, dass die Koordinaten z und F_z in dieser Situation keine Rolle spielen.

Wir wählen zur Illustration der Situation das Koordinatensystem nun folgendermassen ...

- die x -Achse zeigt in der Zeichenebene nach rechts
- die y -Achse zeigt in der Zeichenebene nach oben
- die z -Achse zeigt somit gemäss Rechte-Hand-Regel aus der Zeichenebene heraus.

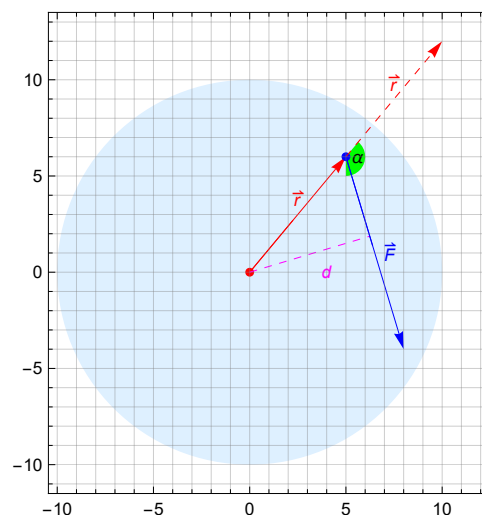


Abbildung Illustration zur Bestimmung des Drehmoments mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} m$ und $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} N$

Methode "Kraft mal Hebelarm"

Geometrisch können wir recht einfach den Betrag und die Richtung des Drehmomentvektors bestimmen.

Betrag: Kraft mal Hebelarm (am einfachsten Werte aus der Zeichnung herausmessen)
 Richtung: Rechte-Hand-Regel

Rechnerisch (optional)

Wir können den Drehmomentvektor auch auf Grund der Angaben in der Zeichnung ausrechnen.

Der Betrag der Kraft ergibt sich gemäss dem Satz des Pythagoras ...

$$F = \sqrt{3^2 + (-10)^2 + 0^2} \text{ N} = \sqrt{109} \text{ N}$$

Der Hebelarm ergibt sich mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $\vec{r}$ und dem Winkel $180^\circ - \alpha$ und der Gegenkathete d ...

$$d = r \sin[180^\circ - \alpha] = r \sin[\alpha]$$

Der Betrag von r ergibt sich mit Hilfe des Satz von Pythagoras ...

$$r = \sqrt{5^2 + 6^2 + 0^2} \text{ m} = \sqrt{61} \text{ m}$$

Wir brauchen noch den Winkel α . Wir erhalten ihn mit Hilfe des Skalarprodukts $\vec{r} \cdot \vec{F} = r F \cos[\alpha]$...

$$\alpha = \text{ArcCos}\left[\frac{\vec{r} \cdot \vec{F}}{r F}\right] = \text{ArcCos}\left[\frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{61} \sqrt{109}}\right] = \text{ArcCos}\left[\frac{5 \cdot 3 - 6 \cdot 10}{\sqrt{61} \sqrt{109}}\right] = \text{ArcCos}\left[-\frac{45}{\sqrt{6649}}\right] = 123.495^\circ$$

Alles zusammengekommen ...

$$M = F d = F r \sin[\alpha] = \sqrt{109} \text{ N} * \sqrt{61} \text{ m} * \sin[123.495^\circ] = 68 \text{ Nm}$$

Die Richtung ergibt sich gemäss der Rechte-Hand-Regel: $\vec{M}$ zeigt in die Zeichenebene hinein.

Methode Vektorprodukt

Viel einfacher können wir den Drehmomentvektor mit Hilfe des Vektorprodukts ausrechnen ...

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Nm} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 0 - 0 \cdot (-10) \\ 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot (-10) - 6 \cdot 3 \end{pmatrix} \text{ Nm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -68 \end{pmatrix} \text{ Nm}$$

Betrag: $M = 68 \text{ Nm}$

Richtung: Das negative Vorzeichen zeigt, dass der Drehmomentvektor in die Zeichenebene hineinzeigt.

Drehmoment bei einem Stützpunkt

Bei einem weiteren interessanten Experiment wird eine ebene Scheibe so auf einen Stützpunkt gestellt, dass sie im Gleichgewicht ist. Und auf diese Scheibe wird ein Gewicht gelegt. Diese Gewichtskraft kann die Scheibe nur kippen (Drehmomentvektor ist in der Scheibenebene), nicht jedoch rotieren.

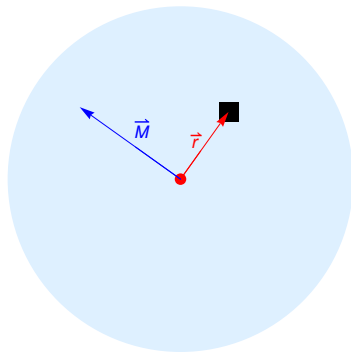


Abbildung Wir schauen von oben auf die Scheibe. Die Gewichtskraft wirkt in die Zeichenebene hinein.

rot: Ortsvektor

blau: Drehmoment

Wir können die Richtung des Drehmoments mit Hilfe der “Rechte-Hand-Regel” bestimmen. Es steht senkrecht auf der Kraft (die nach unten zeigt), also liegt es in der Zeichenebene. Ausserdem steht es senkrecht auf $\vec{r}$. Die Richtung des Drehmoments erhalten wir somit, indem wir den Ortsvektor um 90° im Gegenuhrzeigersinn drehen. Mit der Korkenzieher-Regel stellen wir fest, dass der aufgelegte Körper (so wie es sein soll) nach unten kippen wird.

Weiter hinten im Skript werden wir die Situation im Zusammenhang mit Gleichgewichten noch genauer untersuchen.

Drehmoment bei einem freien Körper

Auf einen freien Körper wirke eine Kraft.

Wenn die Wirkungslinie dieser Kraft durch den Schwerpunkt geht, führt dies (nur) zu einer Translationsbewegung des Körpers.

Wenn die Wirkungslinie dieser Kraft nicht durch den Schwerpunkt geht, führt dies sowohl zu einer Translation als auch zu einer Rotation des Körpers.

Wir haben früher schon gelernt, dass der Angriffspunkt einer Kraft entlang der Wirkungslinie verschoben werden kann, ohne dass sich die Wirkung auf den starren Körper ändert.

Wir können auch die Wirkungslinie einer Kraft parallel verschieben. Dies kreiert aber gleichzeitig ein Drehmoment. Dies geschieht folgendermassen ...

- Wir wählen eine zur ersten Wirkungslinie parallele Wirkungslinie. Sie muss nicht durch den Schwerpunkt gehen.
- Wir konstruieren auf dieser Wirkungslinie zwei Kräfte. Sie haben entgegengesetzte Richtung und den gleichen Betrag wie die ursprüngliche Kraft.
- Diese beiden Kräfte haben physikalisch keine Wirkung. Sie entfalten jedoch eine Bedeutung in Kombination mit der ursprünglichen Kraft.
- Wir haben nun ein Kräftepaar (blau) und eine Einzelkraft (grün).

- Die Einzelkraft (grün) ist für die **Translation** verantwortlich.
- Das Kräftepaar hat ein Drehmoment $M = F d$, wobei d der Abstand der beiden Wirkungslinien ist.
- Dieses Kräftepaar sorgt für eine **Drehung**.

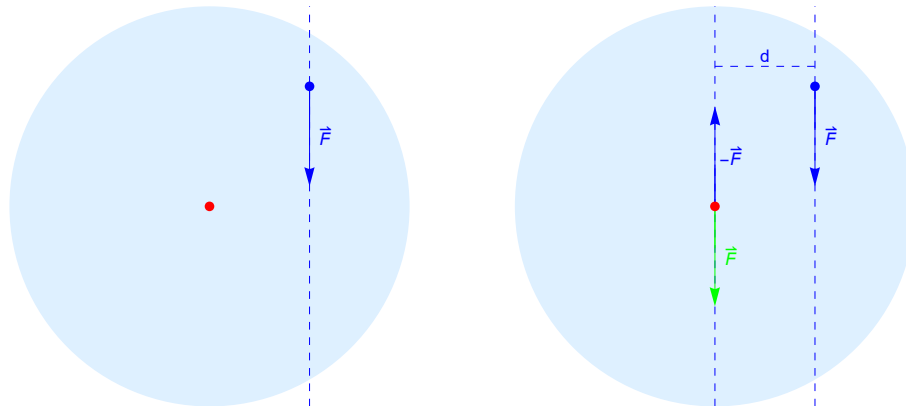


Abbildung a) Kraft auf einen freien Körper
 b) Einführen von $\vec{F}$ und $-\vec{F}$ auf einer parallelen Wirkungslinie

Die Statik beschäftigt sich mit stationären Situationen. Um Gleichgewicht zu haben, muss die Summe aller Kräfte und die Summe aller Drehmomente gleich 0 sein. Der Bewegungszustand des freien Körpers ändert sich in diesem Falle nicht. Dieser Fall ist deshalb uninteressant und wir werden ihn im Rahmen der Statik nicht weiter verfolgen.

Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen

Wenn eine Kraft auf einen starren Körper wirkt, dann kann dies sowohl zu einer Verschiebung (Translation) als auch zu einer Drehung (Rotation) führen. Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn die Summe aller Kräfte $\vec{F}$ und die Summe aller Drehmomente $\vec{M}$ gleich $\vec{0}$ ist. Das heisst (kurz und prägnant mit dem Summationszeichen Σ geschrieben) ...

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{Kräftegleichgewicht}$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{Drehmomentgleichgewicht}$$

Dies sind zwei Vektorgleichungen bzw. sechs mit Koordinaten geschriebene Gleichungen. Mit sechs Gleichungen können sechs Unbekannte bestimmt werden.

Für Kräfte in einer Ebene (d.h. $F_z = 0$) gibt es drei Gleichgewichtsbedingungen ...

$$\sum_{i=1}^n F_{x,i} = \sum_{i=1}^n F_i \cos[\varphi_i] = 0 \quad \text{Kräftegleichgewicht in x-Richtung}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{y,i} = \sum_{i=1}^n F_i \sin[\varphi_i] = 0 \quad \text{Kräftegleichgewicht in y-Richtung}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{z,i} = \sum_{i=1}^n F_i l_i = \sum_{i=1}^n F_i r_i \sin[\alpha_i] = 0 \quad \text{Drehmomentgleichgewicht}$$

Dabei gilt für den i-ten Kraftvektor $\begin{pmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \end{pmatrix}$:

- φ_i ist der Winkel zwischen der x-Achse und dem Kraftvektor $\vec{F}_i$
- r_i ist der Betrag des Ortsvektors $\vec{r}_i$ vom Drehzentrum zum Angriffspunkt des Kraftvektors $\vec{F}_i$
- α_i ist der Winkel zwischen dem Ortsvektor $\vec{r}_i$ und dem Kraftvektor $\vec{F}_i$
- l_i ist der Hebelarm bzw. der Abstand der Wirkungslinie der Kraft vom Drehzentrum

Mit diesen drei Koordinatengleichungen können drei Unbekannte bestimmt werden.

Schwerpunkt

Die Gravitationskraft ist eine Volumenkraft und wirkt auf alle Teile des starren Körpers. Wenn jeder Teil des Körpers die Masse m_i und demzufolge die Gewichtskraft $F_i = m_i g$ hat, erfährt der starre Körper die folgende totale Gewichtskraft ...

$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n m_i g$$

Der **Schwerpunkt** eines starren Körpers ist der Angriffspunkt der Ersatzkraft für alle diese Teilgewichtskräfte. Der Schwerpunkt kann sowohl experimentell als auch rechnerisch bestimmt werden und kann auch ausserhalb des Körpers liegen.

Rechnerische Bestimmung

Wir verwenden den Momentensatz. Danach muss (für den Schwerpunkt) bezüglich jeder Raumachse (x, y und z) das von der Gewichtskraft $m g$ des Körpers erzeugte Drehmoment gleich der Summer der Drehmo-

mente aller Teilgewichtskräfte (die an der Position $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ angreifen und den Betrag $F = m_i g$ haben)

sein.

Mit der Bezeichnung m für die Gesamtmasse (für die $\sum_{i=1}^n m_i = m$ gilt) folgt ...

x-Achse	$x_S m g = \sum_{i=1}^n x_i m_i g$	$x_S = \sum_{i=1}^n \frac{x_i m_i}{m}$
y-Achse	$y_S m g = \sum_{i=1}^n y_i m_i g$	$y_S = \sum_{i=1}^n \frac{y_i m_i}{m}$
z-Achse	$z_S m g = \sum_{i=1}^n z_i m_i g$	$z_S = \sum_{i=1}^n \frac{z_i m_i}{m}$

Für konstante Dichte ρ ergibt sich daraus mit $m_i = \rho V_i$ und $m = \rho V$ für einen homogenen Körper (die Dichte ρ kann gekürzt werden) ...

$$x_S = \sum_{i=1}^n \frac{x_i V_i}{V} \quad y_S = \sum_{i=1}^n \frac{y_i V_i}{V} \quad z_S = \sum_{i=1}^n \frac{z_i V_i}{V}$$

und für eine homogene Fläche A mit den Teilflächen A_i ...

$$x_S = \sum_{i=1}^n \frac{x_i A_i}{A} \quad y_S = \sum_{i=1}^n \frac{y_i A_i}{A} \quad z_S = \sum_{i=1}^n \frac{z_i A_i}{A}$$

und für eine homogene Linie der Länge l mit den Teillängen l_i ...

$$x_S = \sum_{i=1}^n \frac{x_i l_i}{l} \quad y_S = \sum_{i=1}^n \frac{y_i l_i}{l} \quad z_S = \sum_{i=1}^n \frac{z_i l_i}{l}$$

Bemerkung: Diese Gleichungen können für kompliziertere Gebilde zu Integralen erweitert werden.

Experimentelle Bestimmung (für Drehachse und Stab)

Es gibt mehrere Möglichkeiten, den Schwerpunkt eines Stabs zu bestimmen:

- Für einen homogenen Stab liegt der Schwerpunkt in der Mitte des Stabs.
- Probieren: Stab auf einem schmalen Balkenso positionieren, bis er nicht mehr kippt.

Experimentelle Bestimmung (für Stützpunkt und Platte/ebene Fläche)

Es gibt mehrere Möglichkeiten, den Schwerpunkt einer Platte zu bestimmen:

- Probieren: Platte auf einem Stützpunkt positionieren, bis sie nicht mehr kippt.
- Platte an zwei Punkten aufhängen. Der Schnittpunkt der beiden Lote ergibt den Schwerpunkt.
- Schieben der Platte über die Tischkante. Sobald die Platte zu kippen beginnt, wird eine Linie gezogen. Der Schnittpunkt dieser Linie mit einer auf gleiche Weise erstellten zweiten Linie ergibt den Schwerpunkt.
- Rechteck: der Schwerpunkt ist aus Symmetriegründen im Schnittpunkt der beiden Diagonalen.
- Dreieck: der Schwerpunkt ist im Schnittpunkt von zwei Seitenhalbierenden.
- Vieleck: das Vieleck kann in Dreiecke eingeteilt werden. Dann wird der Schwerpunkt jedes Dreiecks bestimmt (Seitenhalbierende schneiden). Der Schwerpunkt zweier Dreiecke liegt entlang der Verbindungslinie der separaten Schwerpunkte. Die Position darauf wird mittels Momentensatz ihrer Flächen ($l_1 \cdot A_1 = l_2 \cdot A_2$) bestimmt. Dieses Verfahren wird für die weiteren Dreiecke wiederholt.

Gleichgewichtsarten

Wir unterscheiden **drei Gleichgewichtsarten**: stabil, labil und indifferent.

Stabiles Gleichgewicht

Der Körper befindet sich in einer **stabilen** Lage, wenn ...

- sich sein Schwerpunkt erhöht bzw.
- er sich zur Gleichgewichtslage zurückbewegt,

wenn er ein wenig von der Gleichgewichtslage wegbewegt wird.

Labiles Gleichgewicht

Der Körper befindet sich in einer **labilen** Lage, wenn ...

- sich sein Schwerpunkt erniedrigt bzw.
- er sich von der Gleichgewichtslage weiter entfernt,

wenn er ein wenig von der Gleichgewichtslage wegbewegt wird.

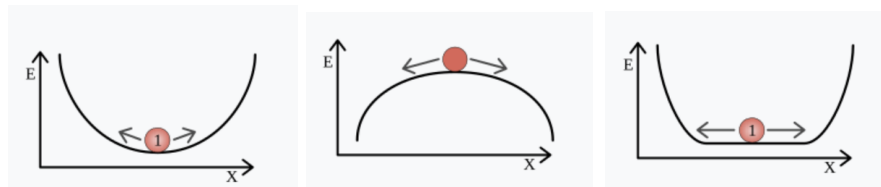
Indifferentes Gleichgewicht

Der Körper befindet sich in einer **indifferenten** Lage, wenn ...

- sein Schwerpunkt auf gleicher Höhe verbleibt bzw.
- an der neuen Stelle liegen bleibt,

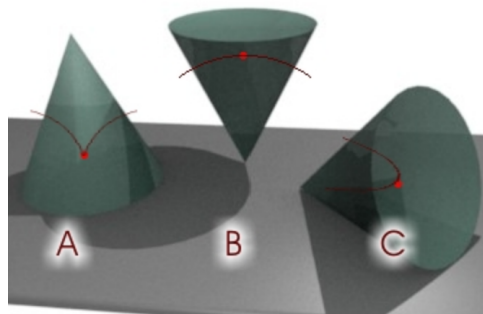
wenn er ein wenig von der Gleichgewichtslage wegbewegt wird.

Beispiele



Abbildung

Verschiedene Gleichgewichtsarten (Link). Von links: stabil, labil, indifferent.



Abbildung

Verschiedene Gleichgewichtsarten (Link). Von links: stabil, labil, indifferent.

Standfestigkeit

Ein Körper kann um eine Kante gekippt werden. Wie stabil ist seine Lage?

Ein Mass dafür ist das **Kippmoment M_K** , das zum Kippen des Körpers erforderlich ist. Wenn das Kippmoment ...

- kleiner als das Standmoment M_S ist, ist die Lage stabil,
- gleich gross wie das Standmoment ist, ist die Lage labil,
- grösser als das Standmoment ist, dann wird der Körper kippen bzw. sich um die Kante drehen.

Das **Standmoment M_S** ist dabei das Drehmoment $F_N \cdot l$, das Produkt aus der auf die Grundfläche wirkenden Normalkraft und dem Hebelarm (senkrechter Abstand des Lots durch den Schwerpunkt von der Kippkante). Der Körper wird kippen, wenn die Summe der Kräfte nicht durch die Standfläche verläuft.



Abbildung Es wirken sowohl die vertikale Gewichtskraft des Körpers als auch die horizontale Kippkraft. Die Kippkante ist in grün eingezeichnet.
 Links: Der Körper wird kippen, da $M_K > M_S$ (obwohl die Kräfte gleich gross sind).
 Rechts: Der Körper steht stabil, denn $M_K < M_S$.

Ein Körper kann auch ohne eine äussere Kraft kippen. In der folgenden Abbildung wird das Kippmoment durch die Hangabtriebskraft und das Standmoment durch die Normalkraft bestimmt.



Abbildung Der Körper wird kippen, wenn das Lot durch den Schwerpunkt nicht durch die Standfläche geht. Der grüne Punkt ist die Kippkante.
 Je nach der Grösse der Haftreibung, wird der Körper gleiten bevor er kippt.

Beispiele für Gleichgewicht im 2D

Drei Gewichte an zwei Rollen

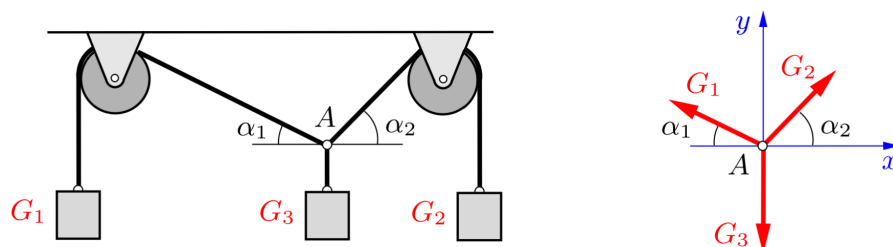


Abbildung Drei Gewichte an zwei Rollen (Gross et al., 2013)

Wir haben Gleichgewicht, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind.

$$\text{horizontal:} \quad F_x = -G_1 \cos[\alpha_1] + G_2 \cos[\alpha_2] = 0$$

$$\text{vertikal:} \quad F_y = G_1 \sin[\alpha_1] + G_2 \sin[\alpha_2] - G_3 = 0$$

Mit diesen zwei Gleichungen lassen sich bei gegebenen Gewichten die beiden unbekannten Winkel α_1 und α_2 (in rot) bestimmen.

Auch die Gleichgewichtsbedingung für das Drehmoment ist erfüllt. Zur Angabe des Drehmoments

können wir den Drehpunkt beliebig wählen. Für A ist das Drehmoment gleich 0, da alle Wirkungslinien den Abstand 0 vom Drehpunkt haben.

Rotation um A: $M^{(A)} = 0$

Ein Gewicht an zwei Stäben

Im Folgenden sollen die beiden Stabkräfte S_1 und S_2 der gelenkig miteinander verbundenen und an der Wand befestigten Stäbe, die durch ein Gewicht belastet sind, bestimmt werden (Gross et al., 2013).

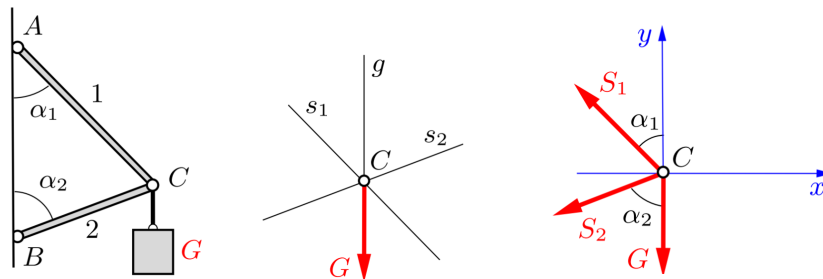


Abbildung Links: Situation
Mitte: Wirkungslinien
Rechts: Kräfte im Koordinatensystem

Für Gleichgewicht haben wir die folgenden Gleichungen ...

horizontal: $F_x = -S_1 \sin[\alpha_1] - S_2 \sin[\alpha_2] = 0$

vertikal: $F_y = S_1 \cos[\alpha_1] - S_2 \cos[\alpha_2] - G = 0$

Mit diesen zwei Gleichungen lassen sich die beiden Unbekannten S_1 und S_2 bestimmen.

Da alle Wirkungslinien in einem Punkt (C) zusammenlaufen, ist das Drehmoment gleich 0.

Balken auf einem Lager

Wo muss der (gewichtslose) Balken durch das Lager unterstützt werden, so dass wir Gleichgewicht haben? (Gross et al., 2013)

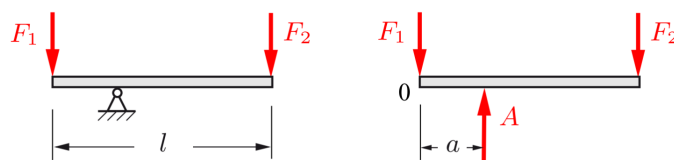


Abbildung Links Balken mit Stütze
Rechts Eingezeichnete Haltekraft A

Für Gleichgewicht haben wir die folgenden Gleichungen ...

vertikal: $F_y = A_y - F_1 - F_2 = 0$

horizontal: $F_x = A_x + 0 + 0 = 0$

Rotation: $M^{(0)} = -F_1 * 0 - F_2 * l + A_y * a = 0$

Damit lassen sich die drei Unbekannten A_x , A_y und a bestimmen.

Starrer Körper mit Drehachse und parallelen Kräften

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Situation bei einem starren Körper mit Drehachse. Ein starrer Körper mit einer Drehachse wird auch als **Hebel** bezeichnet. Eine Kraft kann hier nur eine Rotation um die gegebene Drehachse bewirken.

Wir untersuchen die folgende experimentelle Situation. Alle Kräfte zeigen in die gleiche Richtung (wie zum Beispiel bei der Gewichtskraft).

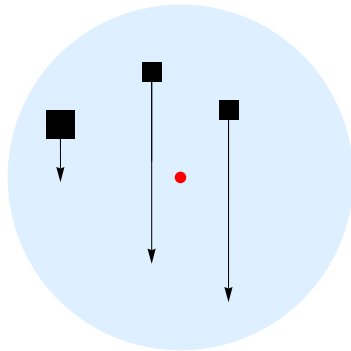


Abbildung Drehscheibe mit aufgehängten Gewichten.

Wann herrscht in dieser Situation ein Gleichgewicht?

Wir müssen hier nur die Drehmomente untersuchen, da die Drehachse nicht verschoben werden kann und die Kräfte durch die fixierte Drehachse kompensiert werden.

Wir wissen, dass sich das Drehmoment einer einzelnen Masse gemäss ...

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

berechnen lässt. Wir wählen ein rechtsändiges kartesisches Koordinatensystem ...

- die x-Achse verläuft in der Zeichenebene nach rechts,
- die y-Achse verläuft in der Zeichenebene nach oben,
- die z-Achse verläuft aus der Zeichenebene heraus.

Auf Grund unserer experimentellen Situation ergibt sich ...

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{die z-Koordinate ist 0 für die Scheibenebene}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{die Kraft wirkt nur nach unten (-y)}$$

Damit ergibt sich für das Drehmoment ...

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -xF \end{pmatrix}$$

Das Drehmoment zeigt in Richtung der z-Achse und der Betrag ist gleich $|xF|$. Das heisst ...

Drehmoment = Kraft mal Hebelarm

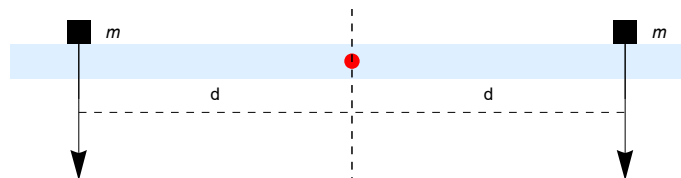
Falls **x positiv** (auf der rechten Seite der Drehachse) ist, ist $-x F$ negativ ist, und das Drehmoment zeigt in die Zeichenebene hinein. Wir sprechen von ...

- einem **negativen** Drehmoment: es zeigt in die negative z-Richtung und die Änderung des Drehwinkels der Scheibe ist negativ ($\Delta\varphi < 0$) bzw.
- einem **rechtsdrehenden** Drehmoment: die resultierende Kreisbahn eines Punktes auf der Scheibe hat eine Richtungsablenkung nach rechts bzw.
- einer Winkelbeschleunigung im **Uhrzeigersinn**.
- Wir können hier auch die **Korkenzieher-Regel** (bzw. Rechte-Faust-Regel) illustrieren. Wenn wir den Korkenzieher auf der Drehachse in die Drehrichtung der beschleunigten Masse bewegen, bewegt er sich in die Richtung des Drehmoments (in diesem Fall also in die Zeichenebene hinein).

Im andern Fall (**x negativ**) spricht man von **positivem** und **linksdrehendem** Drehmoment sowie einer Winkelbeschleunigung im **Gegenuhrzeigersinn**.

Einige Beispiele sollen das Besprochene vertiefen. Wir haben gesehen, dass das Drehmoment nicht von y abhängt (die Kräfte können entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden) und reduzieren deshalb die Scheibe auf einen Balken (alle y sind gleich).

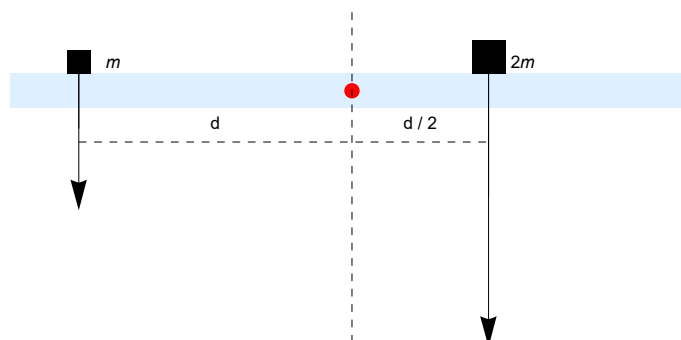
Beispiel 1



Wir haben hier Gleichgewicht, weil die Masse links zu einem positiven Drehmoment und die Masse rechts zu einem negativen Drehmoment führt und die Beträge der Drehmomente beide gleich $m g d$ sind. Die Summe ist also 0. Somit ...

$$\text{Linksdrehendes Drehmoment} = \text{Rechtsdrehendes Drehmoment}$$

Beispiel 2



Wir haben hier Gleichgewicht, weil die Masse links zu einem positiven Drehmoment und die Masse rechts zu einem negativen Drehmoment führt und die Beträge der Drehmomente gleich sind ...

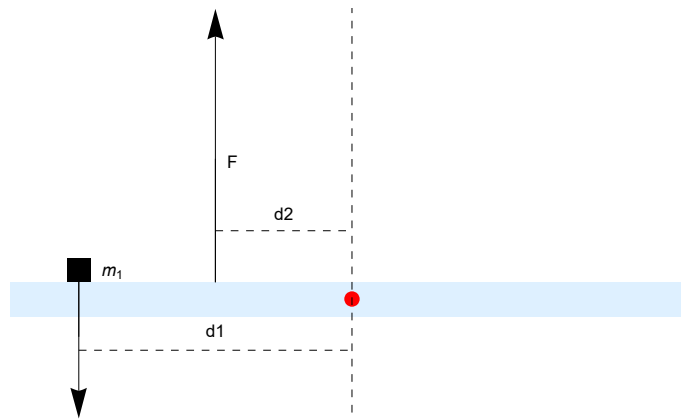
$$m g d = 2 m g \frac{d}{2}$$

$$\text{Linksdrehendes Drehmoment} = \text{Rechtsdrehendes Drehmoment}$$

Es gilt allgemein: Wir haben Gleichgewicht, falls ...

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \quad \text{Hebelgesetz}$$

Beispiel 3



Die Masse links führt zu einem positiven Drehmoment, und die Kraft links nach oben führt zu einem negativen Drehmoment. Wir haben hier Gleichgewicht, wenn die Beträge der Drehmomente gleich sind ...

$$m_1 g d_1 = F d_2$$

Für Interessierte ist eine noch ausführlichere Untersuchung dieser Situationen im Anhang E "Drehscheibe mit Gewichten" gegeben.

Starrer Körper mit Drehachse

Im vorigen Abschnitt haben wir nur Gewichtskräfte (bzw. Kräfte, die alle in die gleiche Richtung gezeigt haben) untersucht.

Hier untersuchen wir nun den allgemeinen Fall eines starren Körpers mit Drehachse, bei dem die Kräfte in beliebige Richtungen zeigen können.

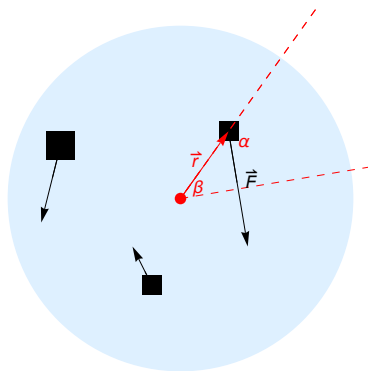


Abbildung Drehscheibe. Die Kräfte zeigen in unterschiedliche Richtungen.

Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem (x nach rechts, y nach oben, z aus der Zeichenebene heraus).

Wenn eine (beliebige) Kraft $\vec{F}$ im Abstand $\vec{r}$ (der Koordinatenursprung sei beliebig auf der Drehachse gewählt) angreift, führt dies auf das folgende Drehmoment ...

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y F_z - z F_y \\ z F_x - x F_z \\ x F_y - y F_x \end{pmatrix}$$

Da die Drehachse ortsfest ist und der Körper nur um die Drehachse drehen kann, haben M_x und M_y sowie F_z keine Wirkung auf den drehbaren Körper. Die feste Drehachse kann nicht gekippt/verschoben werden und wirkt dieser Kraft und diesen Drehmomenten entgegen. Es muss folglich nur M_z berücksichtigt werden.

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x F_y - y F_x \end{pmatrix} \quad \text{bzw. auch} \quad M_z = x F_y - y F_x$$

Die z-Koordinate des Drehmoments $x F_y - y F_x$ entspricht (wie üblich beim Vektorprodukt) der orientierten Fläche des von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad M_z &= r F \sin[\alpha] = F * (r \sin[\alpha]) \\ \text{mit} \quad F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha &\quad \text{Winkel zwischen } \vec{r} \text{ und } \vec{F} \end{aligned}$$

Da für den eingezeichneten Winkel β gilt ...

$$\beta = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha - 90^\circ$$

$$\text{und} \quad \cos[\beta] = \cos[\alpha - 90^\circ] = \sin[\alpha]$$

folgt, dass $r \sin[\alpha]$ auch dem Hebelarm, d.h. dem Abstand der Drehachse von der Wirkungslinie der Kraft entspricht.

Wir können also auch hier formulieren ...

Das Drehmoment entspricht dem Produkt aus Kraft und Hebelarm.

Körper mit einem Stützpunkt im 3D

In diesem Abschnitt untersuchen wir die (im Vergleich zum letzten Abschnitt) allgemeinere Situation, bei der eine ebene Scheibe auf einen Stützpunkt gestellt wird, so dass sie im Gleichgewicht ist. Und auf diese Scheibe werden Gewichte verschiedener Massen gelegt. Diese Gewichtskräfte können nur Rotationen um Drehachsen in der horizontalen Ebene bewirken.

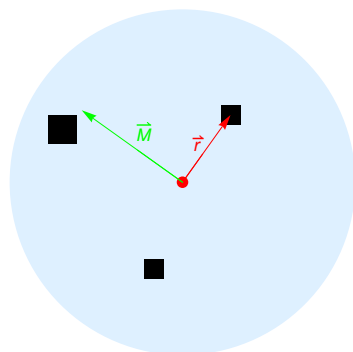


Abbildung Blick von oben auf verschiedene Massen auf einer im Schwerpunkt unterstützten Scheibe. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem (x nach rechts, y nach oben, z aus der Zeichenebene heraus).

Wir schauen von oben auf die (ohne Gewichte) ausbalancierte Scheibe. Die Richtung der Gewichtskräfte zeigt somit in die Zeichenebene hinein (negative z -Richtung).

Wir stellen fest ...

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y mg \\ x mg \\ 0 \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

dass der Drehomentvektor in der Zeichenebene / Scheibe liegt. Die Richtung des grünen Drehmomentvektors wird bestimmt, indem von $\vec{r}$ aus um 90° im Gegenuhrzeigersinn gedreht wird (vgl. Kippregel in der Mathematik).

Dies könnten wir auch mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel herausfinden. Der Drehmomentvektor steht senkrecht auf $\vec{F}$ (also in der Zeichenebene) und senkrecht auf $\vec{r}$. Der Betrag des Drehmoments beträgt $mg \sqrt{x^2 + y^2} = mgr$, ist also wieder gleich "Kraft mal Hebelarm".

Die Korkenzieher-Regel, angewendet auf den grünen Drehmomentvektor, ergibt auch die korrekte Art und Weise, wie die Scheibe zu kippen beginnt.

Analog können wir die Drehmomente für die anderen Massenstücke herausfinden und dann diese Drehmomentvektoren vektoriell addieren, um den Ersatz-Drehmomentvektor für alle Gewichte zu bestimmen. Für Gleichgewicht ist dieser Ersatzvektor gleich $\vec{0}$.

Anhang

Anhang A Experimente

Drehmoment

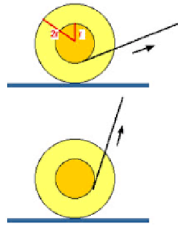


Abbildung In welche Richtung bewegt sich die obere bzw. die untere Fadenspule, wenn daran gezogen wird?

Gleichgewicht



Abbildung Stabiles Gleichgewicht

Die Körper sind stabil, solange der Schwerpunkt unterhalb des Kontaktpunktes liegt.

Drei Massen m_1 (links), m_2 (rechts) und m_3 (in der Mitte) hängen an zwei festen Rollen, die sich auf gleicher Höhe befinden.

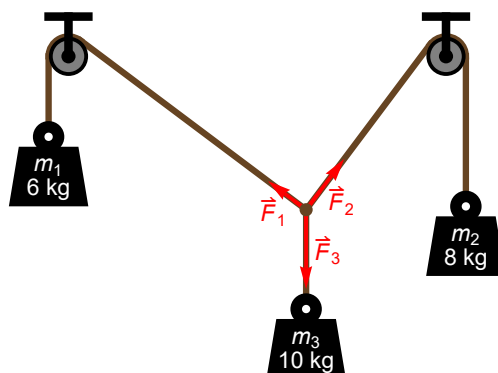


Abbildung Drei Massen an zwei festen Rollen.
Wir haben Gleichgewicht, wenn $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$. Die Winkel stellen sich dementsprechend ein.

Schwerpunkt und Gleichgewicht

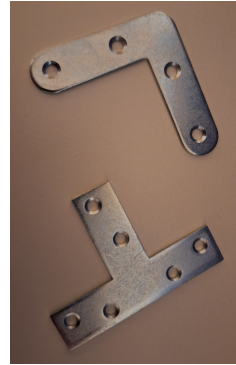
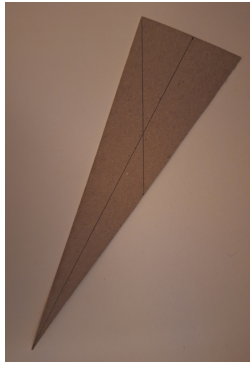


Abbildung Einige Körper zur Bestimmung des Schwerpunkts.

Links Unförmige Platte. Schwerpunktsbestimmung mittels Probieren.

Mitte: Dreiecksfläche. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden liefert den Schwerpunkt.

Rechts: oben: Der Schwerpunkt kann auch ausserhalb des Körpers liegen.

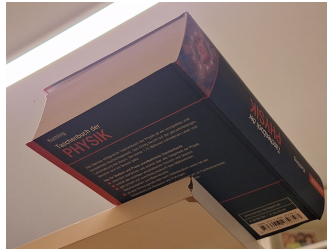
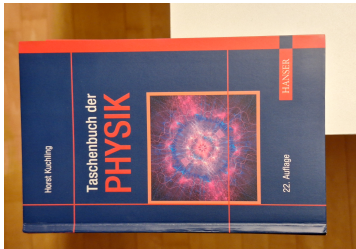


Abbildung Buch über Tischkante

Das Buch liegt stabil, obwohl 3/4 der Fläche im Freien hängen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Lot des Schwerpunkts durch die Tischfläche geht.

Rotation um eine horizontale Drehachse und Gleichgewicht

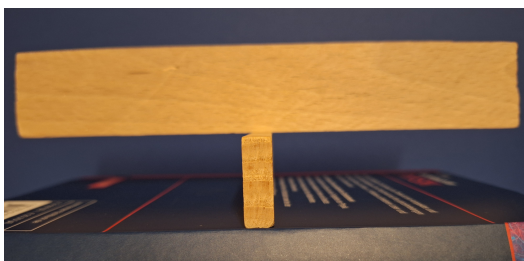


Abbildung Balken auf Stütze

Mit diesem einfachen Experiment lassen sich einige Sachverhalte illustrieren ...

- Solange der Schwerpunkt des Balkens über der Standfläche liegt, ist der Balken stabil.
- An diesem Balken kann das Hebelgesetz erläutert werden.
- An diesem Balken kann das Drehmoment und die Rechte-Hand-Regel erläutert werden.

Rotation um einen Stützpunkt und Gleichgewicht



Abbildung links: Sicht auf die unförmige Platte von oben.
rechts: Stabile Lage.

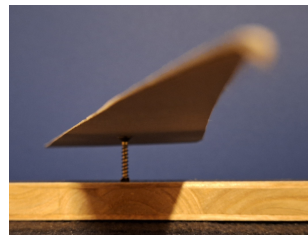
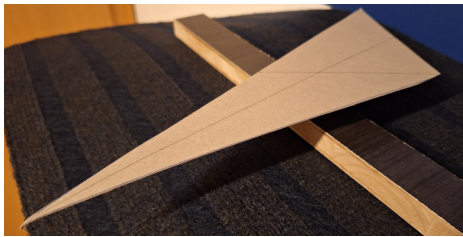


Abbildung links: Sicht auf die dreieckige Platte von oben.
rechts: Stabile Lage.

Durch Auflegen von Gewichtsstücken kann der Drehmomentvektor und die Rechte-Hand-Regel veranschaulicht werden.

Drehmomentgleichgewicht

Eine Drehscheibe werde an einer horizontalen Drehachse aufgehängt.

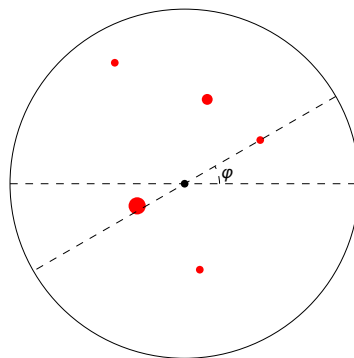


Abbildung Drehmomentgleichgewicht bei verschiedenen Gewichten.
Siehe auch Anhang E.

Anhang B Quellen

Einige interessante Aspekte zur Statik können auf Wikipedia gefunden werden. Die entsprechenden Links sind im Text integriert.

Hilfreich sind auch die Ausführungen im Kuchling und in den beiden Merkhilfen zur Physik bzw. Mathematik. Um sich schnellstmöglich ein Bild zu machen, wo die für das Kapitel “Statik” sowie “Winkelfunktionen” und “Vektoren” relevanten Themen im **Kuchling** und in den beiden **Merkhilfen** gefunden werden können, ist in diesem Anhang eine detaillierte Auflistung gegeben.

Ausserdem kann zur Vertiefung der Vektorrechnung auch das Skript “**Kapitel 14 Vektoren.pdf**” konsultiert werden.

Links auf Websites und Buch

Wikipedia wurde zur Erstellung dieses Skripts stark benutzt.

Für die meisten verwendeten Quellen wurden die Links im Kapiteltext direkt integriert. Damit können die Informationen sehr schnell aufgerufen und als Hintergrundinformation gelesen werden.

Weitere Quellen:

- Johannes Wandinger, Hochschule München (Link)
- Gross, Hauger, Schröder et Wall, “Technische Mechanik 1 - Statik”, 2013 (12. Auflage)

H. Kuchling, “Taschenbuch der Physik”, 2022 (22. Auflage), 714 Seiten

Die für das Kapitel “Statik” relevanten Abschnitte sind die Kapitel 1 und 5.

1. Physikalische Grössen
 - 1.7 Rechnen mit vektoriellen Grössen Seiten 32 - 35
5. Statik des starren Körpers Seiten 58 - 70
 - 5.1 Zusammensetzen von Kräften
 - 5.1.1 Kräfte mit gleicher Wirkungslinie
 - 5.1.2 Kräfte mit gleichem Angriffspunkt
 - 5.1.3 Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten
 - 5.1.4 Parallele Kräfte
 - 5.2 Zerlegen von Kräften
 - 5.3 Drehmoment
 - 5.4 Gleichgewichtsbedingungen
 - 5.5 **später!** Einfache Maschinen (Hebel, Feste Rolle, Lose Rolle, Flaschenzug, Differenzialflaschenzug, Geneigte Ebene, Keil, Schraube)
 - 5.6 Gleichgewicht
 - 5.6.1 Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)
 - 5.6.2 Gleichgewichtsarten
 - 5.6.3 Standfestigkeit

N. Marxer, “Physik Merkhilfe”, 2019, 55 Seiten

Auf den folgenden Seiten können die relevanten Inhalte zum Kapitel “Statik” gefunden werden ...

- | | |
|---------|----------------------|
| Seite 4 | Kraft und Drehmoment |
| Seite 5 | Gleichgewicht |

Anhang Mathematik für die Physik

- | | |
|----------|------------------|
| Seite 50 | Winkelfunktionen |
| Seite 51 | Vektoren |

Seite 51	Kartesische und Polarkoordinaten
Seite 54	Winkelfunktionen

N. Marxer, “Mathematik Merkhilfe” , 2019, 32 Seiten

Auf den folgenden Seiten können die relevanten Inhalte zum Kapitel “Statik” gefunden werden ...

Seite 3	Winkel, Winkelfunktionen ...
Seite 4	Vektoren
Seite 4	Kartesische und Polarkoordinaten

Anhang C Winkelfunktionen: Cosinus, Sinus, Tangens

Einleitung

In diesem Anhang behandeln wir die Winkelfunktionen. Sie haben unterschiedliche Namen, weil sie Anwendungen in verschiedenen Gebieten ermöglichen. Beispielsweise ...

- | | |
|-------------------------------|---|
| ■ Winkelfunktionen | weil die Funktionen auf Winkel angewendet werden z.B. $\sin[\varphi]$. |
| ■ Trigonometrische Funktionen | weil sie bei Dreiecksberechnungen eingesetzt werden (Sinussatz, Cosinussatz). |
| ■ Kreisfunktionen | weil die Definition an Hand des Einheitskreises erfolgt und sie zur Beschreibung von Kreisbewegungen geeignet sind. |

Einheiten für Winkel

Wir haben schon im Skript "Physikalische Grössen und Einheiten" verschiedene Einheiten für Winkel kennengelernt. In Physik und Mathematik werden die Winkel meistens in rad angegeben, in der Geometrie meistens in Grad ($^\circ$). Wir können mit Hilfe der Methode "Multiplikation mit 1" folgendermassen zwischen den verschiedenen Einheiten umrechnen ...

2π rad entspricht einer vollen Umdrehung.

$$\rightarrow 1 = \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{2\pi \text{ rad}}{400 \text{ gon}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ Umdrehung}}$$

Definition der Winkelfunktionen

Die folgende Abbildung dient zur Illustration der Definition der Winkelfunktionen.

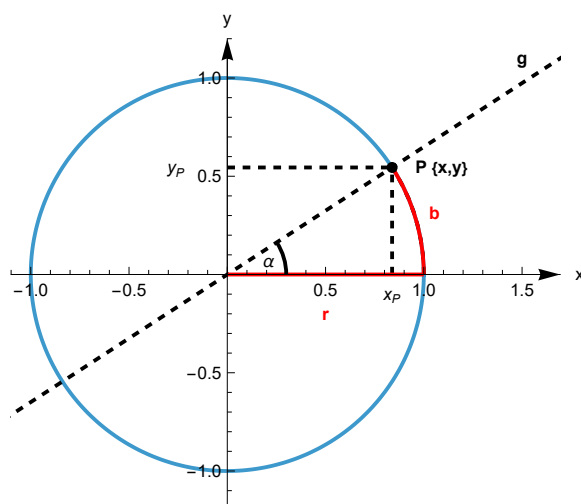


Abbildung Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis

- Der **Punkt P** liege auf dem **Einheitskreis** (das ist ein Kreis mit Radius 1) mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung $\{0, 0\}$.
- Die **Gerade g** und die horizontale x-Achse schliessen einen **Winkel φ** ein. Die Winkel werden von der x-Achse aus im Gegenuhrzeigersinn gemessen.
- Der **Winkel** (in rad) ist per Definition das Verhältnis der Bogenlänge b zum Radius r : $\varphi = \frac{b}{r}$
- Die **Cosinusfunktion** $\cos[\varphi]$ ist durch die x-Koordinate des Punkts P gegeben: $\cos[\varphi] = x$
- Die **Sinusfunktion** $\sin[\varphi]$ ist durch die y-Koordinate des Punkts P gegeben: $\sin[\varphi] = y$

- Die **Tangensfunktion** $\tan[\varphi]$ ist durch das Verhältnis der beiden Koordinaten gegeben:

$$\tan[\varphi] = \frac{\sin[\varphi]}{\cos[\varphi]} = \frac{y}{x}$$

- Das heisst, dass (auf Grund des Strahlensatzes) in jedem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\sin[\varphi] = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos[\varphi] = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan[\varphi] = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Auf Grund der Definition am Einheitskreis ergibt sich für spezielle Winkel φ ...

- $\varphi = 0 \text{ rad} = 0^\circ$ $\cos[0^\circ] = 1$ $\sin[0^\circ] = 0$ $\tan[0^\circ] = 0$
- $\varphi = \pi/2 \text{ rad} = 90^\circ$ $\cos[90^\circ] = 0$ $\sin[90^\circ] = 1$ $\tan[90^\circ] = \infty$
- $\varphi = \pi \text{ rad} = 180^\circ$ $\cos[180^\circ] = -1$ $\sin[180^\circ] = 0$ $\tan[180^\circ] = 0$
- $\varphi = 3/2 \pi \text{ rad} = 270^\circ$ $\cos[270^\circ] = 0$ $\sin[270^\circ] = -1$ $\tan[270^\circ] = -\infty$
- Die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus haben die Periode $2\pi \text{ rad}$ (360°). Für Winkel grösser als $2\pi \text{ rad}$ (oder kleiner als 0 rad , wenn wir im Uhrzeigersinn rotieren) haben wir den gleichen Kurvenverlauf: Diese Winkelfunktionen sind periodisch.

Wir könnten die weiteren Werte aus der Zeichnung des Einheitskreises mit einem Geodreieck herauslesen. Wir können auch mit Hilfe von Dreieckskonstruktionen und dem Satz des Pythagoras die Werte der Cosinus- und Sinusfunktion für einfache Winkel ausrechnen.

Die Funktionswerte der Sinus und Cosinus-Funktion können den folgenden Funktionsgraphen entnommen werden ...

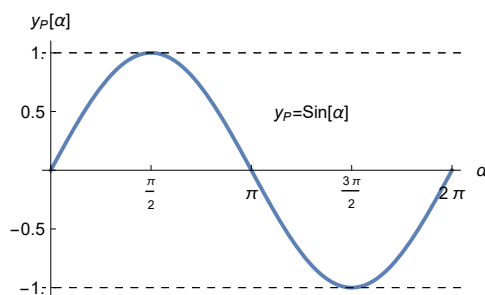
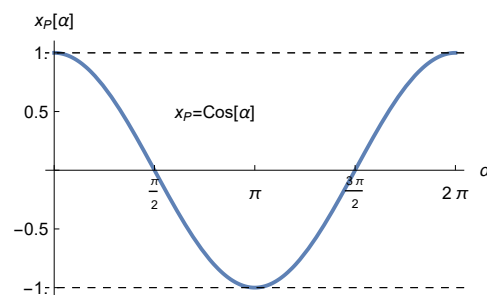


Abbildung Sinusfunktion



Cosinusfunktion

Wir sehen, ...

- dass die Werte der Sinus- und des Cosinusfunktion zwischen den Werten -1 und +1 hin- und herpendeln.
- wenn wir die Sinusfunktion um $\pi/2 \text{ rad}$ (bzw. 90°) nach links schieben, erhalten wir die Cosinusfunktion.
- dass die Cosinus- und Sinusfunktionen viele weitere Symmetrieeigenschaften erfüllen.
- Es würde somit ausreichen, die Sinuswerte zwischen 0 und $\pi/2 \text{ rad}$ zu kennen, um alle weiteren Werte zu bestimmen.

Arten von Winkelfunktionen

Die gebräuchlichsten **Winkelfunktionen** sind die folgenden drei sowie ihre **Umkehrfunktionen** ...

Winkelfunktionen			Umkehrfunktionen		
-----			-----		
-	Cosinus	cos	-	ArcusCosinus	arccos ($\cos^{-1}$)
-	Sinus	sin	-	ArcusSinus	arcsin ($\sin^{-1}$)
-	Tangens	tan	-	ArcusTangens	arctan ($\tan^{-1}$)

Die Bezeichnung der Umkehrfunktion durch $\cos^{-1}/\sin^{-1}/\tan^{-1}$ ist nicht eindeutig. Beispielsweise weiss man bei $\cos^{-1}$ nicht, ob damit die Funktion arccos oder die Funktion $\frac{1}{\cos}$ gemeint ist. Bei den meisten Taschenrechner wird jedoch diese (kürzere) Schreibweise verwendet.

Die Umkehrfunktionen werden verwendet, um Gleichungen wie ...

$$\sin(\varphi) = 0.5$$

nach φ aufzulösen, denn arcsin macht die sin Funktion rückgängig. Da die Sinus- und Cosinus-Funktion nur Werte zwischen -1 und +1 liefern, kann deren Umkehrfunktion nur auf Argumente zwischen -1 und +1 angewendet werden. ArcSin[2] ist nicht definiert.

Wir wenden arcsin auf beiden Seiten der obigen Gleichung an und erhalten ...

Linke Seite	$\arcsin(\sin(\varphi)) = \varphi$	
Rechte Seite	$\arcsin(0.5) = 30^\circ$	gemäss Taschenrechner

Auf Grund der Periodizität und Symmetrieeigenschaften gibt es jedoch nicht nur diese Lösung, sondern ∞ viele weitere.

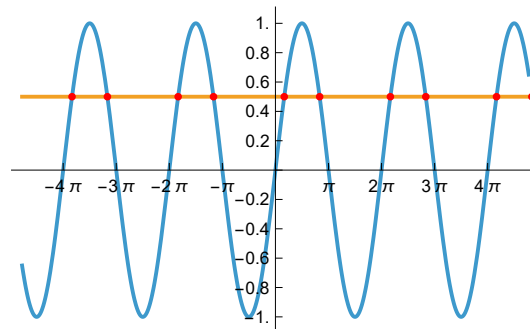


Abbildung Die Gleichung $\sin[\varphi] = 0.5$ hat unendlich viele Lösungen.

Alle weiteren Lösungen können jedoch aus der Fundamentallösung $\text{ArcSin}[0.5]$ bestimmt werden ...

$$\varphi_i = \text{ArcSin}[0.5] + k * 2\pi \quad k = -\infty \dots \infty$$

$$\varphi_i = \pi - \text{ArcSin}[0.5] + k * 2\pi \quad k = -\infty \dots +\infty$$

Wichtig ist auch noch die Tangensfunktion. Deren Funktionsgraph sieht folgendermassen aus (Zusätzlich sind auch die ∞ vielen Lösungen für die Gleichung $\tan[\varphi] = 0.5$ eingetragen.)...

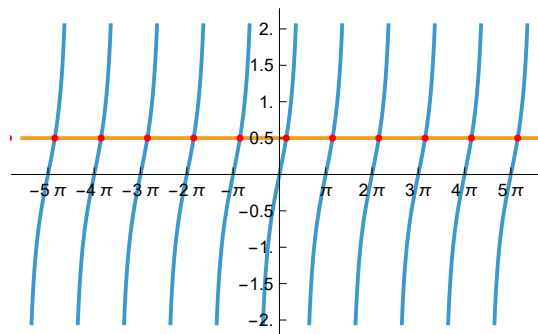


Abbildung Die Tangens Funktion hat eine Periode von π .

Die ∞ vielen Lösungen für $\tan[\varphi] = 0.5$ sind $\varphi = \text{ArcTan}[0.5] + k\pi \quad k = -\infty \dots \infty$

Um bei gewissen Formeln eine einfachere Darstellung zu haben, werden einige weitere Winkelfunktionen verwendet ...

- Cosecans csc $\text{csc} = 1/\sin$
- Secans sec $\text{sec} = 1/\cos$
- Cotangens cot $\text{cot} = 1/\tan$

Wir beschränken uns in dieser Vortragsreihe auf die wichtigsten drei: Sin, Cos und Tan.

Die sechs erwähnten Winkelfunktionen sind miteinander verknüpft. Wie man aus folgender Tabelle sieht, würde es ausreichen, nur die Funktion sin zu verwenden, da alle andern durch diese ausgedrückt werden können.

in terms of	$\sin \theta$	$\csc \theta$	$\cos \theta$	$\sec \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$
$\sin \theta =$	$\sin \theta$	$\frac{1}{\csc \theta}$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	$\pm \frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta}$	$\pm \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$
$\csc \theta =$	$\frac{1}{\sin \theta}$	$\csc \theta$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\pm \frac{\sec \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$	$\pm \sqrt{1 + \cot^2 \theta}$
$\cos \theta =$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$	$\pm \frac{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}{\csc \theta}$	$\cos \theta$	$\frac{1}{\sec \theta}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\pm \frac{\cot \theta}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$
$\sec \theta =$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\pm \frac{\csc \theta}{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\sec \theta$	$\pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}{\cot \theta}$
$\tan \theta =$	$\pm \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta}$	$\pm \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$	$\tan \theta$	$\frac{1}{\cot \theta}$
$\cot \theta =$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$	$\pm \sqrt{\csc^2 \theta - 1}$	$\pm \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\frac{1}{\tan \theta}$	$\cot \theta$

Abbildung Die Winkelfunktionen können alle auf die Funktion sin (oder eine andere) zurückgeführt werden. ([Link](#))

Ausserdem würde es bei der Funktion sin ausreichen, nur die Funktionswerte im Bereich von 0 bis $\pi/2$ zu kennen. Der Rest ergibt sich durch die Symmetrien und die Periodizität.

Anwendungen der Winkelfunktionen in der Physik

Die Winkelfunktionen spielen sowohl in der Mathematik als auch in der Physik eine wichtige Rolle. Wir werden sie in den folgenden Gebieten der Physik wieder antreffen.

- Koordinatensysteme
 - Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten (und umgekehrt)
- Anwendungen in der **Statik**
 - Zerlegung der Kräfte an der geneigten Ebene
 - Berechnung des Drehmoments mit Hilfe des Vektorprodukts
 - Berechnung der vektoriellen Addition beim Kräfteparallelogramm (Cosinus- und Sinussatz)

- Anwendungen in der **Kinematik/Dynamik**

- Beschreibung von Kreisbewegungen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos[\omega t] \\ \sin[\omega t] \end{pmatrix}$
- Schräger Wurf Abwurfwinkel
- Arbeit Skalarprodukt

- Anwendung bei **Schwingungen**

- Darstellung einer Schwingung durch $a * \sin[\omega t]$
- Berechnung von Superpositionen (Überlagerungen)

- Anwendung bei **mechanischen Wellen**, in der Optik und Akustik

- Darstellung einer Welle durch $a * \sin[kx - \omega t]$
- Berechnung von Superpositionen (Überlagerungen)

Eigenschaften von Winkelfunktionen

In der Physik-Merkhilfe auf den Seiten 50 und 54 oder in der Mathematik-Merkhilfe auf Seite 12 können viele Eigenschaften der Winkelfunktionen gefunden werden:

- Winkelfunktionen, Umkehrfunktionen
- trigonometrischer Pythagoras
- Periodizität, Reduktionsformeln
- Erster Summensatz: z.B. $\sin[\alpha + \beta]$...
- Zweiter Summensatz: z.B. $\sin[\alpha] + \sin[\beta]$...
- Produkte zweier Winkelfunktionen: z.B. $\sin[\alpha] * \sin[\beta]$...

Siehe dazu u.a: [Link](#)

Anhang D Rechnen mit Vektoren

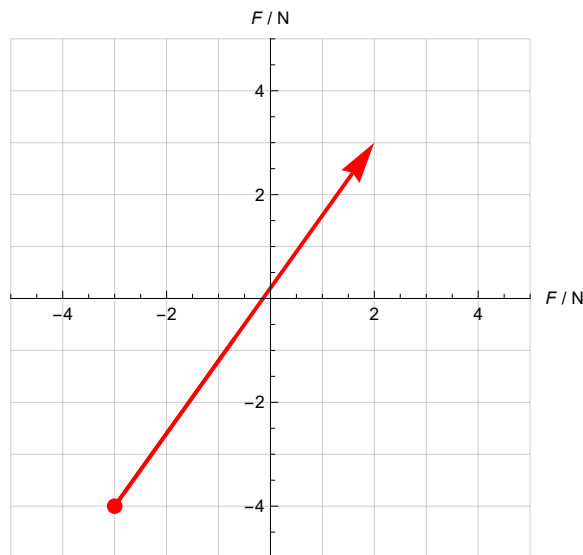
Einleitung

Die Vektoren spielen (ähnlich wie die Winkelfunktionen) eine wichtige Rolle in der Physik. Sie kommen in vielen Gebieten der Physik vor: z.B.

- Kinematik: Ort $\vec{r}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$, Beschleunigung $\vec{a}$...
- Statik: Kraft $\vec{F}$, Drehmoment $\vec{M}$...
- Dynamik: Impuls $\vec{p}$, Drehimpuls $\vec{L}$...
- Elektrizitätslehre Elektrische Feldstärke $\vec{E}$, magnetische Feldstärke $\vec{H}$...
- und viele mehr

Wir müssen deshalb zum besseren Verständnis der Ausführungen und Herleitungen die hier aufgeführten wichtigsten Formeln (die auch in beiden Merkhilfen enthalten sind) verstehen.

Vektoren können zeichnerisch als Pfeile dargestellt werden.



- Der Pfeil zeigt die Richtung an.
- Der Schaft ist der Angriffspunkt.
- Die Länge des Pfeils ist ein Mass für die Grösse (zusammen mit der Skalierung).

Die Vektoren können aber auch rechnerisch mit Hilfe von sogenannten Spaltenvektoren (mit Einheit) dargestellt werden.

Dazu müssen wir zunächst ein Koordinatensystem wählen. In den meisten Situationen wählen wir ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem (Descartes, 1596 - 1650, [Link](#)), bei dem von einem Ursprung O ausgehend drei Einheitsbasisvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ so gewählt werden, dass diese Einheitsvektoren zueinander jeweils einen Winkel von 90° einschliessen. Rechtshändig bedeutet, dass $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ zueinander wie der Daumen/Zeigefinger/abgespreizter Mittelfinger der rechten Hand orientiert sind. Jeder Punkt im Raum kann dann dargestellt werden als ...

$$\vec{r} = x * \vec{e}_x + y * \vec{e}_y + z * \vec{e}_z$$

bzw. jeder Richtungsvektor als ...

$$\vec{a} = a_x * \vec{e}_x + a_y * \vec{e}_y + a_z * \vec{e}_z$$

Diese beiden Vektoren werden abgekürzt folgendermassen geschrieben ...

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

In obiger Abbildung zeigt die x-Achse horizontal nach rechts und die y-Achse vertikal nach oben. Somit hat der eingezeichnete Vektor die kartesischen Koordinaten ...

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \text{ N} - (-3 \text{ N}) \\ 3 \text{ N} - (-4 \text{ N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ N} \quad \text{Häuschen zählen!}$$

Vektoren können unterschiedlich verschoben werden ...

- Für Rechenoperationen dürfen die Vektoren frei verschoben werden. Zum Beispiel bei der Addition zum Parallelogramm.
- Kraftvektoren dürfen bei starren Körpern entlang der Wirkungslinie (Linie aus Angriffspunkt und Richtung des Vektors) verschoben werden, ohne dass sich die Wirkung auf einen starren Körper ändern würde.
- Im allgemeinen dürfen die Vektoren nicht verschoben werden (Beispielsweise bei einem elektrischen Feld).

Formeln (aus den Merkhilfen)

Wir müssen (ohne Hilfsmittel) die folgenden Rechentechniken beherrschen. Sie gelten in einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem.

Addition von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:
$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Subtraktion kann man sich vorstellen als Addition des Gegenvektors $-\vec{b}$

$$\text{d.h.} \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (Zahl):
$$k * \vec{a} = k * \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k * a_x \\ k * a_y \\ k * a_z \end{pmatrix}$$

Division eines Vektors durch einen Skalar:
$$\frac{\vec{a}}{k} = \frac{1}{k} * \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x/k \\ a_y/k \\ a_z/k \end{pmatrix}$$

Betrag (Länge) des Vektors $\vec{a}$:
$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Einheitsvektor von $\vec{a}$:
$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

$$\text{d.h.} \quad \vec{a} = a * \vec{a}_0$$

d.h. jeder Vektor kann geschrieben werden als "Betrag mal Richtungseinheitsvektor".

Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Geometrische Interpretation:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a * b * \cos[\varphi]$$

Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$:

$$\vec{a}_{\parallel \vec{b}} = a \cos[\varphi] \vec{b}_0 = (\vec{a} \cdot \vec{b}_0) \vec{b}_0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \vec{b}$$

Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a * b * \sin[\varphi] * \vec{e}_0$$

$$\vec{e}_0 \perp \vec{a}, \vec{e}_0 \perp \vec{b}, \quad |\vec{e}_0| = 1$$

Rechnen mit Vektoren

Vektoren können geometrisch als Pfeile und rechnerisch als Spaltenvektoren dargestellt werden. Wir beschränken uns im Folgenden auf Vektoren in der Ebene, also in 2 Dimensionen. Wir verwenden durchgehend das kartesische Koordinatensystem.

1. Wir starten mit drei identischen freien Vektoren

Der Angriffspunkt spielt hier keine Rolle.

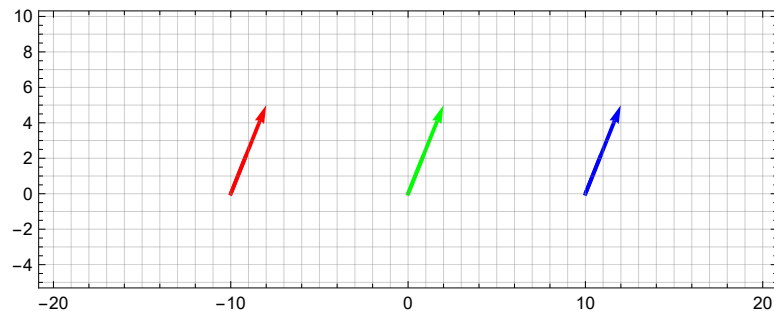


Abbildung Drei verschiedene Repräsentanten des freien Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Denn beispielsweise hat der Vektor links den Angriffspunkt bzw. Schaft bei $\{-10, 0\}$ und die Spitze bei $\{-8, 5\}$. Dies gibt eine Koordinate von +2 in der Horizontalen und eine Koordinate von +5 in der Vertikalen.

$$\text{Vektor} = \text{Koordinaten Spitze} - \text{Schaft} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen in $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ bedeuten vom Schaft zur Spitze geht es 2 Häuschen nach rechts und 5 Häuschen nach oben.

Wir kommen zum gleichen Ergebnis durch Zählen der Häuschen (nach rechts und nach oben).

2. Multiplizieren mit einem Skalar (strecken/stauchen/invertieren)

Durch Multiplikation mit einer Zahl können wir die Vektoren strecken (Zahl grösser als 1 oder kleiner als -1), stauchen (Zahl zwischen -1 und +1). Bei negativen Zahlen wird der Richtungssinn umgedreht.

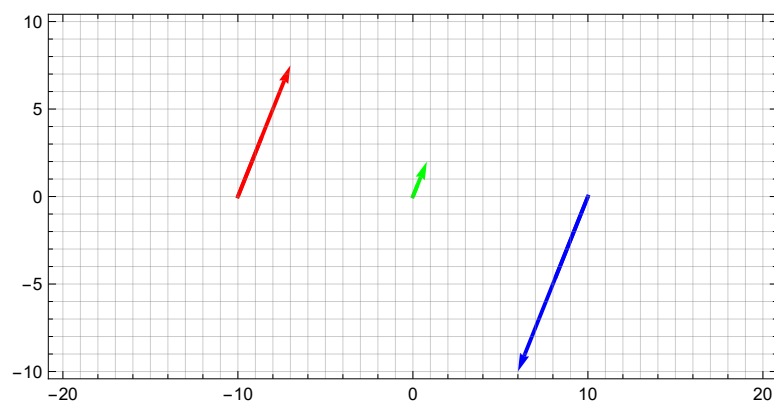


Abbildung Der rote Vektor wurde mit dem Faktor 1.5 gestreckt.
Der grüne Vektor wurde mit dem Faktor 0.4 gestaucht.
Der blaue Vektor wurde mit dem Faktor -2 gestreckt und invertiert.

Rechnerisch geschieht dies folgendermassen:

$$\text{Roter Vektor} \quad \vec{v}_1 = 1.5 * \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 * 2 \\ 1.5 * 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Grüner Vektor} \quad \vec{v}_2 = 0.4 * \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 * 2 \\ 0.4 * 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Blauer Vektor} \quad \vec{v}_3 = -2 * \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 * 2 \\ -2 * 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Die negativen Zahlen in $\begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$ bedeuten vom Schaft zur Spitze geht es 4 Häuschen nach links und 10 Häuschen nach unten.

3. Addition von zwei Vektoren

Die Addition von 2 Vektoren geschieht folgendermassen.

Geometrisch (siehe Zeichnung):

- Wir verschieben die Vektoren, so dass sie einen gemeinsam Schaft haben.
- blau: Wir verschieben den Vektor $\vec{b}$ an die Spitze des Vektors $\vec{a}$ und erhalten die Summe $\vec{s}$ (rot). Oder
- grün: Wir verschieben den Vektor $\vec{a}$ an die Spitze des Vektors $\vec{b}$ und erhalten auch die Summe $\vec{s}$ (rot).
- Der Summenvektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ ist gleich der Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
- Wir müssen nicht das ganze Parallelogramm konstruieren. Eine (rot oder grün) der beiden dargestellten Additionen würde ausreichen zur Konstruktion des Summenvektors $\vec{s}$

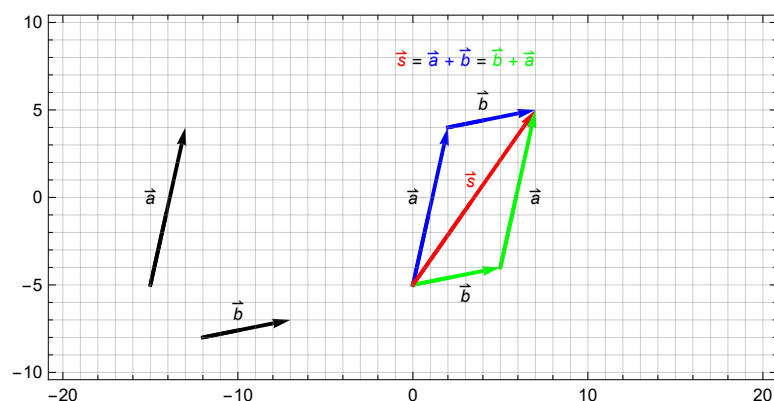


Abbildung Summe der zwei Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt den Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

Rechnerisch $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 5 \\ 9 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

4. Subtraktion von zwei Vektoren

Geometrisch: Wir haben hier 2 Varianten zur Auswahl, um die Differenz $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ zu zeichnen.

Variante 1 Wir addieren zu $\vec{a}$ den Gegenvektor von $\vec{b}$. Der Gegenvektor von $\vec{b}$ hat die gleiche Länge wie $\vec{b}$, aber die umgekehrte Richtung.

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (1)$$

Variante 2 Wir stellen die Reihenfolge der Vektoren um ...

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = -\vec{b} + \vec{a} \quad (2)$$

Es resultiert jedes mal das gleiche Ergebnis für $\vec{d}$: Variante 1 (blau), Variante 2 (grün).

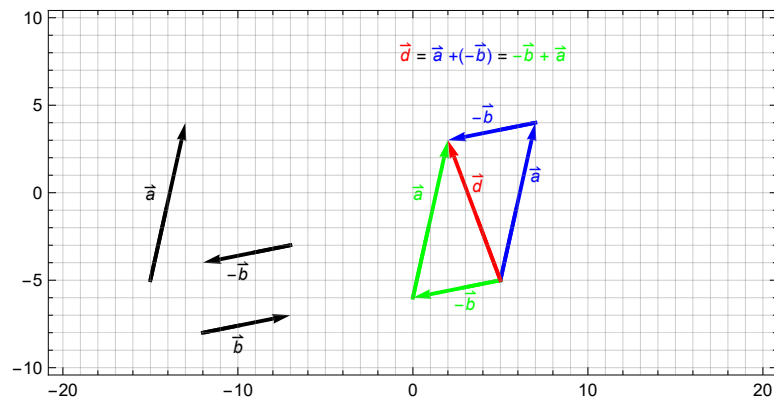


Abbildung Konstruktion des Differenzvektors $\vec{a} - \vec{b}$.

Der Differenzvektor entspricht übrigens der anderen Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Rechnerisch
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 5 \\ 9 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

5. Betrag / Länge eines Vektors

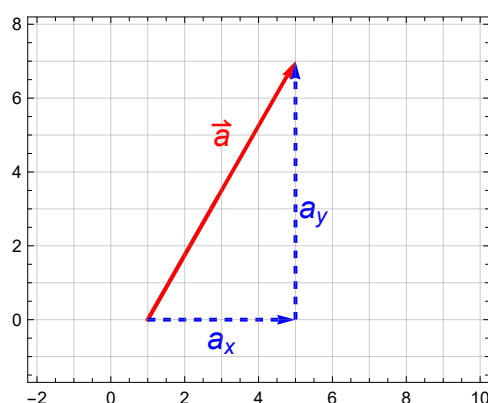


Abbildung Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Die **Länge** des Vektors $\vec{a}$ wird mit a bezeichnet. Diese Länge berechnen wir mit Hilfe des Satz von Pythagoras.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8.06$$

6. Einheitsvektor

Der **Einheitsvektor** von $\vec{a}$ wird geschrieben als $\vec{a}_0$ und berechnet, indem man den Vektor $\vec{a}$ durch seine Länge a teilt. Somit ...

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a}$$

7. Skalarprodukt von zwei Vektoren

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist definiert als ...

Länge von $\vec{a}$ mal Länge von $\vec{b}$ mal Cosinus des Zwischenwinkels.

d.h. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos[\varphi]$

Das Skalarprodukt liefert somit eine Zahl (eventuell mit Einheit).

Die Länge der Strecke, wenn wir $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ projizieren (= Ankathete im rechtwinkligen Dreieck), entspricht dem Wert $a \cos[\varphi]$. Das Skalarprodukt ist demnach b multipliziert mit der Länge der Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$. Wir könnten alternativ auch $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ projizieren. Es würde das gleiche Ergebnis resultieren.

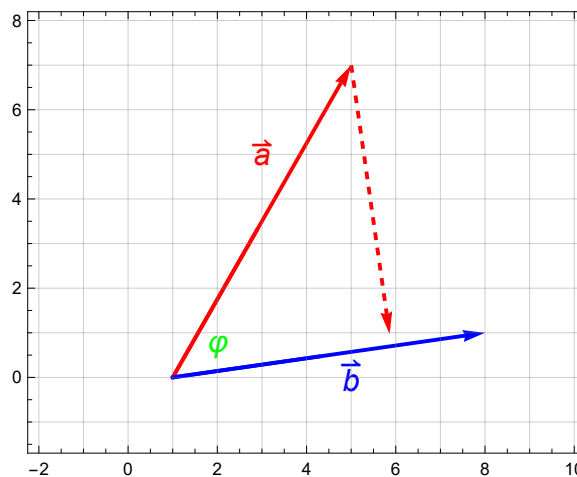


Abbildung Illustration des Skalarprodukts $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rechnerisch erhalten wir mit Hilfe der Formel (die für das kartesische Koordinatensystem gilt) ...

$$(1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x * b_x + a_y * b_y$$

das folgende Ergebnis ...

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 * 7 + 7 * 1 = 35$$

Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst liefert die Länge im Quadrat ...

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a * a * \cos[0^\circ] = a * a = a^2.$$

d.h. $a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Für die Projektion $\vec{a}_{\parallel \vec{b}}$ des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$ erhalten wir gemäss "Vektor = Länge mal Richtung" ...

$$\vec{a}_{\parallel \vec{b}} = (a \cos[\varphi]) \vec{b}_0 = (\vec{a} \cdot \vec{b}_0) \vec{b}_0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \vec{b}$$

Herleitung der Formel für das Skalarprodukt (optional)

Wie kommt man auf die obige Formel (1)?

Wir müssen nur die Definition der Vektoren ...

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x * \vec{e}_x + a_y * \vec{e}_y + a_z * \vec{e}_z \\ \vec{b} &= b_x * \vec{e}_x + b_y * \vec{e}_y + b_z * \vec{e}_z\end{aligned}$$

berücksichtigen und erhalten durch Ausmultiplizieren ...

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x * \vec{e}_x + a_y * \vec{e}_y + a_z * \vec{e}_z) \cdot (b_x * \vec{e}_x + b_y * \vec{e}_y + b_z * \vec{e}_z) \\ &= a_x b_x (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) + a_x b_y (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y) + a_x b_z (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z) \\ &\quad + a_y b_x (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x) + a_y b_y (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) + a_y b_z (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z) \\ &\quad + a_z b_x (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x) + a_z b_y (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y) + a_z b_z (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)\end{aligned}$$

Auf Grund der Definition des Skalarprodukts ...

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos[\varphi]$$

gilt nun ...

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$	für gleiche Indizes
denn beispielsweise:	$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 * 1 * \cos[0^\circ] = 1$
$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$	für ungleiche Indizes
denn beispielsweise:	$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 1 * 1 * \cos[90^\circ] = 0$

Es bleibt somit übrig ...

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \text{qed}$$

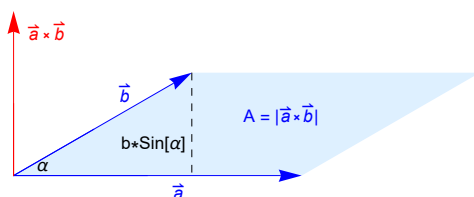
8. Vektorprodukt von zwei Vektoren

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ (auch Kreuzprodukt genannt) von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird folgendermassen definiert ...

- Länge: $a * b * |\sin[\varphi]|$
Dies entspricht der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
- Richtung: Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gemäss der Rechte-Hand-Regel (d.h. der Daumen zeigt in Richtung von $\vec{a}$, der Zeigefinger zeigt in Richtung von $\vec{b}$ und der abgespreizte Mittelfinger zeigt in Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$). Die resultierende Richtung wird durch den Einheitsvektor $\vec{e}_0$ ausgedrückt.

Zusammengenommen heisst dies ...

$$\vec{a} \times \vec{b} = a b |\sin[\varphi]| * \vec{e}_0$$



Abbildung

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Während das Skalarprodukt eine Zahl/Skalar ergibt (mit Einheit), liefert das Vektorprodukt einen Vektor (mit Einheit).

Im kartesischen Koordinatensystem wird das Vektorprodukt folgendermassen ausgerechnet ...

$$(2) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Veranschaulichung für $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ gelb: +; orange: -

$$\begin{pmatrix} c_x \\ - \\ - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} - \\ c_y \\ - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} - \\ - \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Ein einfaches Beispiel ...

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor schaut (auch gemäss der Rechte-Hand-Regel) aus der Zeichenebene heraus, wenn die x-Achse nach rechts und die y-Achse nach oben zeigt.

Das Vektorprodukt ist eigentlich für 3D gedacht. Wir können das Vektorprodukt aber auch im 2D verwenden, wenn wir die z-Komponenten null setzen ...

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Der resultierende Vektor zeigt aus der Zeichenebene heraus. Sein Betrag $|a_x b_y - a_y b_x|$ bzw. seine Länge entspricht der Fläche des von den 2D-Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

Herleitung der Formel für das Vektorprodukt

Wie kommt man auf die recht komplizierte Formel (2) oben?

Analog wie bei der Herleitung beim Skalarprodukt können wir schreiben ...

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \times (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) \\ &= a_x b_x (\vec{e}_x \times \vec{e}_x) + a_x b_y (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + a_x b_z (\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \\ &\quad + a_y b_x (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + a_y b_y (\vec{e}_y \times \vec{e}_y) + a_y b_z (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) \\ &\quad + a_z b_x (\vec{e}_z \times \vec{e}_x) + a_z b_y (\vec{e}_z \times \vec{e}_y) + a_z b_z (\vec{e}_z \times \vec{e}_z) \end{aligned}$$

Auf Grund der Definition des Vektorprodukts ...

$$\vec{a} \times \vec{b} = a b \sin[\varphi] \vec{e}_0$$

gilt nun ...

für die Länge des Vektors bei gleichen Indizes: z.B.

$$\begin{aligned} \text{Länge} \quad & |\vec{e}_x \times \vec{e}_x| = 1 \cdot 1 \cdot \sin[0^\circ] = 0 \\ & \text{d.h. } \vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0} \end{aligned}$$

für ungleiche Indizes: z.B.

$$\begin{aligned} \text{Länge} \quad & |\vec{e}_x \times \vec{e}_y| = 1 \cdot 1 \cdot \sin[90^\circ] = 1 \\ \text{Richtung} \quad & \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \quad \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z \\ & \text{auf Grund der Rechte-Hand-Regel} \end{aligned}$$

Es resultiert die folgende Formel ...

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{0} + a_x b_y (\vec{e}_z) + a_x b_z (-\vec{e}_y) \\
 &\quad + a_y b_x (-\vec{e}_z) + \vec{0} + a_y b_z (+\vec{e}_x) \\
 &\quad + a_z b_x (\vec{e}_y) + a_z b_y (-\vec{e}_x) + \vec{0} \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z \\
 &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad \text{qed}
 \end{aligned}$$

Es gilt somit ...

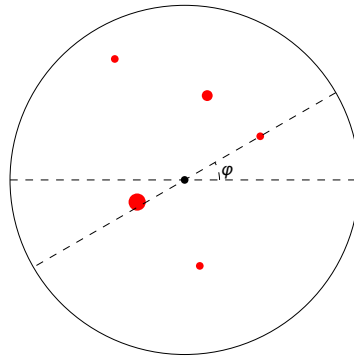
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Siehe auch

Seite 51	Physik Merkhilfe
Seite 4	Mathematik Merkhilfe
Seite 31 - 35	Kuchling

Anhang E Drehscheibe mit Gewichten (optional)

An eine um eine horizontale Achse drehbare Scheibe werden n Gewichte bzw. Massen $m_1, m_2, \dots, m_n$ an den Positionen $P_1, P_2, \dots, P_n$ befestigt.



Fragestellung: In welcher Stellung ist die Scheibe im Gleichgewicht?

Wir lösen die Aufgabe zunächst allgemein!

Drehmomentgleichgewicht heisst ...

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{0}$$

Die n Kräfte $\vec{F}_i$ (d.h. $i = 1, 2, \dots, n$) sind die Gewichtskräfte und die $\vec{r}_i$ sind die Ortsvektoren für die n Angriffspunkte.

Um die Drehmomente auszurechnen, müssen wir ein Koordinatensystem definieren. Wir legen die Achsen so, dass ...

die positiven x-Werte in der Zeichenebene nach rechts,
die positiven y-Werte in der Zeichenebene nach oben und
die positiven z-Werte aus der Zeichenebene heraus zeigen.

Damit ergibt sich für die Vektoren ...

$$\vec{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_i g \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Gewichtskräfte der einzelnen Massen m_i

$$\vec{r}_i = \begin{pmatrix} r_i \cos[\varphi + \alpha_{1i}] \\ r_i \sin[\varphi + \alpha_{1i}] \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ortsvektoren der Angriffspunkte

Die Stellung der Scheibe ist durch die Angabe des absoluten Winkels φ eines einzigen Massenpunktes gegeben. Wir wählen den Punkt 1, d.h. die Masse m_1 . Die anderen absoluten Winkel ergeben sich dann mithilfe der Addition des Winkels α_{1i} , der den Winkel zwischen der i -ten Masse und der 1-ten Masse angibt.

Die angegebenen Winkel bedeuten somit das Folgende ...

$$\begin{array}{llll}
 i = 1 & \varphi_1 = \varphi & = \varphi + \alpha_{11} & \text{denn} \quad \alpha_{11} = 0^\circ \\
 i = 2 & \varphi_2 = \varphi + \alpha_{12} & & \\
 & \dots & & \\
 i = n & \varphi_n = \varphi + \alpha_{1n} & &
 \end{array}$$

Wir erhalten somit für das Drehmomentgleichgewicht

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \vec{M} &= \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} r_i \cos[\varphi + \alpha_{1i}] \\ r_i \sin[\varphi + \alpha_{1i}] \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -m_i g \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_i g r_i \cos[\varphi + \alpha_{1i}] \end{pmatrix} \stackrel{\text{Gleichgewicht}}{=} \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Gleichung ...

$$\sum_{i=1}^n (-m_i g r_i \cos[\varphi + \alpha_{1i}]) = 0$$

Diese Gleichung können wir auch erhalten, indem wir die Regel "Drehmoment = Kraft mal Hebelarm" anwenden.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Gewichtskraft:} & m_i g \\
 \text{Hebelarm:} & r_i \cos[\varphi + \alpha_{1i}]
 \end{array}$$

Wir dividieren beide Seiten durch $-g$ und erhalten die etwas einfachere Gleichung ...

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n m_i r_i \cos[\varphi + \alpha_{1i}] = 0$$

bzw. ohne Summationszeichen ...

$$m_1 r_1 \cos[\varphi + \alpha_{11}] + m_2 r_2 \cos[\varphi + \alpha_{12}] + \dots + m_n r_n \cos[\varphi + \alpha_{1n}] = 0$$

Um aus dieser Gleichung φ zu bestimmen, verwenden wir den zweiten Summensatz (siehe Merkhilfe), d.h.

$$\cos[\alpha + \beta] = \cos[\alpha] \cos[\beta] - \sin[\alpha] \sin[\beta]$$

Somit erhalten wir (wir schreiben wieder kürzer mit Summationszeichen) ...

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n m_i r_i (\cos[\varphi] \cos[\alpha_{1i}] - \sin[\varphi] \sin[\alpha_{1i}]) = 0$$

Wir separieren die beiden Ausdrücke mit $\cos[\varphi]$ und $\sin[\varphi]$ und klammern aus ...

$$\begin{aligned}
 \cos[\varphi] * \sum_{i=1}^n (m_i r_i \cos[\alpha_{1i}]) - \sin[\varphi] * \sum_{i=1}^n (m_i r_i \sin[\alpha_{1i}]) &= 0 \\
 \cos[\varphi] * \sum_{i=1}^n (m_i r_i \cos[\alpha_{1i}]) &= \sin[\varphi] * \sum_{i=1}^n (m_i r_i \sin[\alpha_{1i}]) \\
 \frac{\sum_{i=1}^n (m_i r_i \cos[\alpha_{1i}])}{\sum_{i=1}^n (m_i r_i \sin[\alpha_{1i}])} &= \frac{\sin[\varphi]}{\cos[\varphi]} \\
 \tan[\varphi] &= \frac{\sum_{i=1}^n (m_i r_i \cos[\alpha_{1i}])}{\sum_{i=1}^n (m_i r_i \sin[\alpha_{1i}])} \\
 (4) \quad \varphi_1 &= \text{ArcTan} \left[\frac{\sum_{i=1}^n (m_i r_i \cos[\alpha_{1i}])}{\sum_{i=1}^n (m_i r_i \sin[\alpha_{1i}])} \right] \quad \varphi_2 = \varphi_1 + 180^\circ
 \end{aligned}$$

Der ArcTan liefert eine Lösung (φ_1) im Bereich von -90° bis $+90^\circ$. Die zweite Lösung (φ_2) liegt somit im Bereich von 90° bis 270° . Das eine Gleichgewicht ist in der Regel stabil und das andere labil.

Anwendung auf 2 Massen

Diese Schlussformel vereinfacht sich für 2 Gewichte und ohne Summationszeichen geschrieben zu ...

$$(5) \quad \varphi_1 = \text{ArcTan} \left[\frac{m_1 r_1 \cos[0^\circ] + m_2 r_2 \cos[\alpha_{12}]}{m_1 r_1 \sin[0^\circ] + m_2 r_2 \sin[\alpha_{12}]} \right] = \text{ArcTan} \left[\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 \cos[\alpha_{12}]}{m_2 r_2 \sin[\alpha_{12}]} \right]$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 180^\circ$$

Anwendung auf 3 Massen

Analog gilt für 3 Gewichte die Formel ...

$$(6) \quad \varphi_1 = \text{ArcTan} \left[\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 \cos[\alpha_{12}] + m_3 r_3 \cos[\alpha_{13}]}{m_2 r_2 \sin[\alpha_{12}] + m_3 r_3 \sin[\alpha_{13}]} \right]$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 180^\circ$$

Herleitung der Formel für zwei Gewichte (ohne Summationszeichen)

Wenn die Herleitung der allgemeinen Formel mit den Summationszeichen etwas verwirrend sein sollte, können Sie hier die Herleitung der Formel ohne Summationszeichen für zwei Gewichte nachverfolgen.

Wir gehen von folgenden Bezeichnungen aus ...

Winkel zwischen P_1 und P_2	α	
Angehängte Massen	m_1	m_2
Angriffspunkte	P_1 mit $\{r_1, \varphi\}$	P_2 mit $\{r_2, \varphi + \alpha\}$

Wir erhalten gemäss Skizze das folgende Drehmomentgleichgewicht (Kraft mal Hebelarm) ...

$$(1) \quad m_1 g r_1 \cos[\varphi] + m_2 g r_2 \cos[\varphi + \alpha] = 0$$

Gesucht ist der Winkel φ . In einem ersten Schritt können wir die Erdbeschleunigung g wegkürzen ...

$$m_1 r_1 \cos[\varphi] + m_2 r_2 \cos[\varphi + \alpha] = 0$$

Als nächstes versuchen wir, $\cos[\varphi + \alpha]$ so umzuformen, dass nur noch der Winkel φ im Argument der Winkelfunktion vorkommt. Wir verwenden dazu den ersten Summensatz ...

$$m_1 r_1 \cos[\varphi] + m_2 r_2 (\cos[\varphi] \cos[\alpha] - \sin[\varphi] \sin[\alpha]) = 0$$

Wir bringen die Ausdrücke mit $\cos[\varphi]$ auf die linke Seite, und diejenigen mit $\sin[\varphi]$ auf die andere Seite und klammern aus ...

$$(m_1 r_1 + m_2 r_2 \cos[\alpha]) * \cos[\varphi] = (m_2 r_2 \sin[\alpha]) * \sin[\varphi]$$

$$\frac{\sin[\varphi]}{\cos[\varphi]} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 \cos[\alpha]}{m_2 r_2 \sin[\alpha]}$$

Einführen der Tangensfunktion liefert dann als Endformel ...

$$\tan[\varphi] = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 \cos[\alpha]}{m_2 r_2 \sin[\alpha]}$$

$$(2) \quad \varphi_1 = \text{ArcTan}\left[\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 \cos[\alpha]}{m_2 r_2 \sin[\alpha]}\right] \quad \varphi_2 = \varphi_1 + 180^\circ$$

Einige Beispiele

Im Folgenden werden wir einige spezielle Beispiele untersuchen.

Beispiel 2 Gewichte mit gleicher Masse und gleichem radialen Abstand

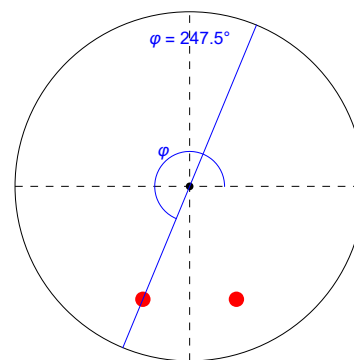
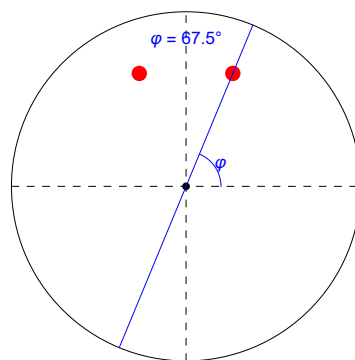
Massen: $m_1 = m_2$

Radialer Abstand: $r_1 = r_2$

Winkel: $\alpha_{12} = 45^\circ$

Stellung: $\varphi = 67.50^\circ$

$\varphi = 247.50^\circ$



Abbildung

Labile und stabile Gleichgewichtslage

Beispiel 3 Gewichte mit gleicher Masse und gleichem radialen Abstand

Massen: $m_1 = m_2 = m_3$

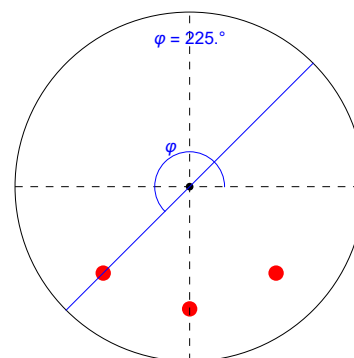
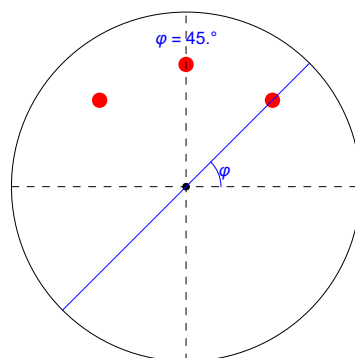
Radialer Abstand: $r_1 = r_2 = r_3$

Winkel: $\alpha_{12} = 45^\circ$

$\alpha_{13} = 90^\circ$

Stellung: $\varphi = 45^\circ$

$\varphi = 225^\circ$



Abbildung

Labile und stabile Gleichgewichtslage

Beispiel 3 Gewichte mit ungleicher Masse und gleichem radialen Abstand

Massen:	$m_1 = 2 m_2 = 3 m_3$	
Radialer Abstand:	$r_1 = r_2 = r_3$	
Winkel:	$\alpha_{12} = 45^\circ$	$\alpha_{13} = 90^\circ$
Stellung:	$\varphi = 63.0936^\circ$	$\varphi = 243.094^\circ$

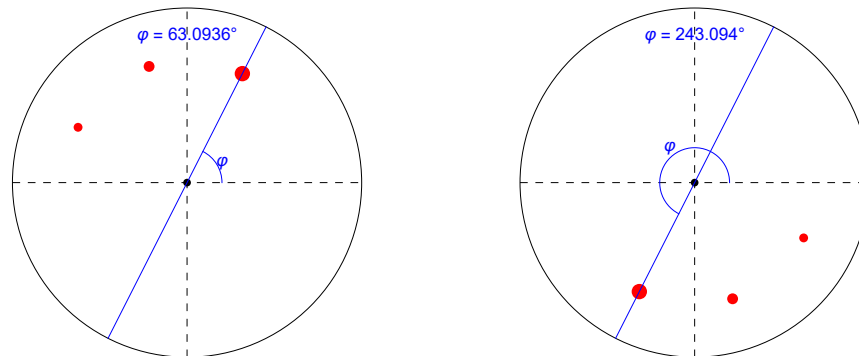


Abbildung Labile und stabile Gleichgewichtslage

Beispiel 3 Gewichte mit ungleicher Masse und ungleichem radialen Abstand

Massen:	$m_1 = 2 m_2 = 3 m_3$	
Radialer Abstand:	$r_1 = 2 r_2 = 3 r_3$	
Winkel:	$\alpha_{12} = 45^\circ$	$\alpha_{13} = 90^\circ$
Stellung:	$\varphi = 76.2531^\circ$	$\varphi = 256.253^\circ$

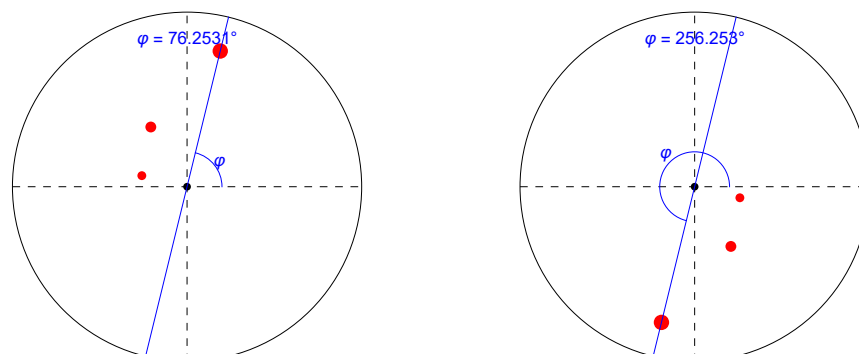


Abbildung Labile und stabile Gleichgewichtslage